Title	保型表現の$ \varepsilon$-因子と導手 (Algebraic Number Theory and Related Topics 2008)
Author(s)	石川, 佳弘
Citation	数理解析研究所講究録別冊 = RIMS Kokyuroku Bessatsu (2010), B19: 135-169
Issue Date	2010-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/176878
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B19 (2010), 135–169

保型表現の ε-因子と導手
(ε-factor and conductor of automorphic representations)

By

石川 佳弘 (Yoshi-hiro ISHIKAWA) *

Abstract

In this note, we survey on relations between the ε-factor and intrinsic invariants for ramified factors π_v of automorphic representations on $\mathrm{GL}(n)$. In the second section, two different integral presentations of the Standard L-function are recalled. In sections §3,§4, for each of these integrals, the proportional factors of local functional equation are calculated to be related to invariants of π_v.

このノートでは, $\mathrm{GL}(n)$ 上の保型表現 π に対し, その分岐成分の内在的不変量 と局所 ε-因子の関係について概説する。

第一節では, 有理数体上の楕円曲線から 話を起こし, 本稿で扱われる問題 と その動機を説明する。一般に 与えれた保型 L-関数を積分表示する方法は 一通りとは限らないが, 第二節では $\mathrm{GL}(n)$ の標準 L-関数に対し 異なる二つの積分表示を取り上げ, それらが局所積分の Euler 積に分解し, 不分岐成分が 局所 L-因子に一致することを見る。第三節, 第四節で, それぞれの積分に対し, その局所成分の関数等式の両辺を計算する。両辺の比として 局所 ε-因子を明示し, π の分岐成分の内在的不変量と結び付く様を見る。どちらの積分の場合も, $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の或るコンパクト部分群が 重要な働きをする。本稿を通じて, p-進一般線形群 $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の表現論の基本事項は, 自由に使うこととする。読者の便利の為に, 第五節に Bernstein-Zelevinsky の Segment 理論 と 各クラスの表現に付随する 局所 L-/ε-因子に関する事実を纏めた。表現論の言葉に不慣れな読者は, 適宜参照して頂きたい。Appendix が 全体に比して 少々大部となってしまったこと, 筆者の力量不足と お詫びしたい。この概説記事が, 読者諸賢の"保型表現における分岐理論"への興味の喚起と, 今後の研究の一助となれば, 筆者にとって望外の喜びである。

Acknowledgement：時間の都合もあり, 十二月の講演では 本稿の前半部分のみ お話させて頂いた。後半 (§2,3, §2.4, §4) は, 一月の RIMS 合宿型セミナー「数論幾何における分岐理論」に於いて 紹介した内容である。概説講演の機会を与えて下さった 中村博昭氏, 後半部の本稿への収録を許して下さった 安田正大氏, そして 多々のコメント, 注意を下さった 査読者に, 深く感謝する。

Received April 22, 2009. Revised February 10, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 22E50, 11F70, 11S45, 11S37
*Department of Mathematics, Okayama University, Okayama 700-8530, JAPAN

§ 1. Motivation and Problem

ここでは, 楕円モジュラ形式, Dirichlet 指標に付随する L-関数の ε-因子の数論的意味を思い出し, $\mathrm{GL}(n)$ の標準 L-関数への一般化を 問題として提起する。本稿では, 標準 L-関数の積分表示を通じて定義される ε-因子を扱うが, 積分の具体的な形は 次セクション第二節で説明する。

§ 1.1. 楕円曲線の ε-因子 と 導手

$\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 $E:\ y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, $(g_i \in \mathbb{Q})$ に対して, $N_E := \prod_{p|\Delta_E} p^{f_p}$, $f_p := \mathrm{ord}_p\Delta_E + 1 - \#\pi_0(\mathcal{E}_p)$ は[1] , E の conductor と呼ばれる 重要な数論的不変量である。但し, $\Delta_E := g_2^3 - 27g_3^2$ は E の discriminant, $\mathcal{E}$ は E の極小 Néron モデル, $\#\pi_0(\mathcal{E}_p)$ は p 上の special fibre $\mathcal{E}_p$ の既約成分の個数とする。E の Hasse-Weil L-関数を $L(s;E) := \prod_{p\leq\infty} L_p(s;E_p)$,

$$L_p(s;E_p) := \begin{cases} \left(1 - a_p^E p^{-s} + p\,p^{-2s}\right)^{-1} & \text{when } p \not| \Delta_E \\ \left(1 \mp a_p^E p^{-s}\right)^{-1} & \text{when } E_p:\ \text{split/non-split } \mathbb{G}_m \text{ 型} \\ 1 & \text{when } E_p:\ \mathbb{G}_a \text{ 型} \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s) & \text{when } p = \infty \end{cases}$$

と定義すると, この無限積は $\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{2}$ で絶対収束する。但し, E_p は E の mod. p reduction, $a_p^E := p + 1 - \#E_p(\mathbb{F}_p)$ である。更に,

Theorem 1.1. *$L(s;E)$ は, 全 s-平面に正則に解析接続され, 次の関数等式*

$$L(s;E) = \left(w \cdot N_E^{1-s}\right) \times L(2-s;E),$$

($w \in \{\pm 1\}$) を満たす。 □

この関数等式の比例因子 $w \cdot N_E^{1-s}$ を, $\varepsilon(s;E)$ と書き 楕円曲線 E の 大域 ε-因子 と呼ぶ。上の定理は, 次の modularity(Theorem 1.2) と保型 L-関数の性質 (Proposition 1.3) から従うのであった。ここで注意すべきことは, E の conductor N_E が, L-関数の関数等式の比例因子に現れていることである。

Theorem 1.2 (modularity ; [Wil], [Ta-Wi], [Br-Co-Di-Ta]).
$\mathbb{Q}$ 上定義された 任意の楕円曲線 E に対し, ウェイト 2, レヴェル N_E の カスプ新形式 $f_E \in S_2^{new}\big(\Gamma_0(N_E)\big)$ が存在し, s の関数としての等式 $L(s;E) = L(s;f_E)$ を満たす。 □

但し, 上等式右辺の $L(s;f)$ は, カスプ形式 f に付随する 保型 L-関数 であり, 次の定義で指標 χ を自明指標に採ったものである。一般に, $(m,N) = 1$ の時, ウェイト κ, レヴェル N の 正規化 Hecke eigen カスプ形式 $f \in S_\kappa\big(\Gamma_0(N)\big)$ と $m \in \mathbb{N}$ を法とする 原始的 Dirichlet 指標 $\chi : \left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対し, χ-twisted L-関数 を

$$L(s;f\times\chi) := \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cdot \chi(n)}{n^s}$$

[1] Ogg-斎藤 公式 (*cf.* [Ogg], [Sai]) である。本来は, Tate 加群への Galois 表現を用いて定義される。

とおく。ここで, f のカスプ $\sqrt{-1}\infty$ の廻りでの Fourier 展開を

$$f(z) \ =: \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times e^{2\pi\sqrt{-1}nz} \tag{1.1.1}$$

とする時, 正規化 Hecke eigen 形式 であるとは, $a_1 = 1$ かつ $T_p f = a_p f$ for $\forall p \nmid N$ を満たすことであった。ここに, T_p は 素数 p に於ける Hecke 作用素である。

Proposition 1.3 (χ-twisted L-関数の解析接続 と 関数等式)**.**
$L(s; f \times \chi)$ は, 全 s-平面に正則に解析接続される。更に, $f|_{\kappa}\left[\begin{smallmatrix} & -1 \\ N & \end{smallmatrix}\right] = w\sqrt{-1}^{\kappa} f$ なら,

$$L(s; f \times \chi) \ = \ \left(w \cdot \chi(-1)\Big(\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{m}}\Big)^2 \cdot \chi(N) \times \left(m^{\kappa/2-s}\right)^2 N^{\kappa/2-s}\right) \times L(\kappa - s; f \times \overline{\chi})$$

なる関数等式を満たす。但し, $w \in \mathbb{C}^{(1)}$, $\tau(\chi)$ は χ の *Gauss* 和 である。 □

Proof. χ が自明指標の場合に, 方針を記しておく。$z = x + \sqrt{-1}y$ として, f の Fourier 展開 (1.1.1) の両辺を虚軸方向 y に沿って Mellin 変換すると,

$$\int_0^{\infty} f(\sqrt{-1}y)\, y^s \,\mathrm{d}^{\times} y \ = \ \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1.1.2}$$

となる。この積分表示から, 解析接続が得られる。更に, 左辺の積分域を $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ と分けて, $\left[\begin{smallmatrix} & -1 \\ N & \end{smallmatrix}\right]$-作用に関する仮定を使うと, 関数等式も従う。 □

Hecke 作用素の乗法性 (*i.e.* $(p, q) = 1$ なら, $T_{pq} = T_p \cdot T_q$) と 新形式の理論より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cdot \chi(n)}{n^s} \ = \ \prod_{p \nmid N} \left(1 - a_p \chi(p) p^{-s} + p^{\kappa-1} p^{-2s}\right)^{-1} \times \prod_{p | N} \left(p^{-s}\text{の一次以下多項式}\right)^{-1}$$

と, L-関数の Dirichlet 級数パートは Euler 積に分解する ことに注意しておく。また, 上の関数等式の比例因子を $\varepsilon(s; f \times \chi)$ と書き, χ-twisted L-関数の 大域 ε-因子 と呼ぶ。

§ 1.2. GL(n) の保型表現 と 標準 L-関数

以下, F を有限次代数体, $\mathbb{A}$ をそのアデール環, $\mathrm{GL}(n)$ を F 上定義された n 次一般線形群, Z をその中心 とする。また, $F_v \supset \mathcal{O}_v$ は F の 素点 v による完備化 と その整数環, $\mathcal{P}_v = \varpi\mathcal{O}_v$ は $\mathcal{O}_v$ の 極大イデアルとする。剰余体 $\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v$ の位数を q_v と書く。

Definition 1.4. ユニタリな イデール群指標 $\omega : \mathbb{A}^{\times} \to \mathbb{C}^{(1)}$ に対し, 関数 $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が, 中心指標 ω のカスプ形式 である とは, 次の条件を満たすことである。

(1) $\varphi(\gamma z g) = \omega(x)\varphi(g)$, for $\forall\gamma \in \mathrm{GL}_n(F)$, $\forall x \in \mathbb{A}^{\times}$, $z = xI_n \in Z$,

(2) $\varphi\big|_{\mathrm{GL}_n(F_\infty)}(g_\infty g_{\mathrm{fin}})$: smooth in $g_\infty \in \mathrm{GL}_n(F_\infty)$,

(3) $\dim_{\mathbb{C}} \langle\, \varphi(*k) \mid \forall k \in K_\infty \times K_{\mathrm{fin}} \,\rangle < \infty$, 但し, $K_\infty := \prod_{v|\infty} K_v$,
$K_v := \mathrm{O}(n)$ (v が実), $\mathrm{U}(n)$ (v が複素) ; $K_{\mathrm{fin}} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$: 開 compact 部分群,
(4) $\dim_{\mathbb{C}} \langle\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\exp tX)\big|_{t=0} \mid \forall X \in \mathfrak{Z} \,\rangle < \infty$, 但し, $\mathfrak{Z}$ は 包絡環 $U\big(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})\big)$ の中心,
(5) ”緩増加”,
(6) $\int_{N_{\underline{n}}(F)\backslash N_{\underline{n}}(\mathbb{A})} \varphi(ng)\mathrm{d}n = 0$, for $\forall' g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, $\forall \underline{n} \vdash n$ (See §5.1 for $N_{\underline{n}}$). ■

$\mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}(n)\big)_\omega := \{\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \mid$ 中心指標 ω のカスプ形式 $\}$ を, 適切に $Z(\mathbb{A})\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ 上の二乗可積分関数の空間に完備化した空間を $\mathcal{L}_0^2\big(\mathrm{GL}(n)\big)_\omega$ と書くと, ここ[2]には $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ が右移動 R で作用し, ユニタリ表現を与える。この表現は, Hilbert 直和に 有限重複度で既約分解する ([G-G-PS] §3.3.3) :

$$\big(\, R,\ \widehat{\oplus}_\omega \mathcal{L}_0^2\big(\mathrm{GL}(n)\big)_\omega \,\big) \;\cong\; \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})^\wedge_{adm}} m_0(\pi)\,\big(\pi, V_\pi\big).$$

さらに, この重複度 $m_0(\pi)$ は高々 1 である (*cf.* [Sha]) ことが知られている。そこで, アデール群の許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})^\wedge_{adm}$ で $m_0(\pi) = 1$ となるものを, $\mathrm{GL}(n)$ の カスプ保型表現 と呼ぶ。

重要なことは, $\pi \cong \otimes'_v \pi_v$, $\pi_v \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$(*See* §5.1) と 制限直積に分解する (*cf.* [Fla]) ことであり, 殆ど全ての v に対して, π_v は 不分岐表現(spherical 表現 とも言う) (*i.e.* $V_{\pi_v}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)} \neq \{0\}$) である。$\pi_v \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ が不分岐なら, $F^\times$ の不分岐擬指標の組 $(\chi_{1,v}, \ldots, \chi_{n,v})$ が 順を除いて一意に定まり, π_v は $\mathrm{Ind}_{B_v(F_v)}^{\mathrm{GL}_n(F_v)} \delta_{B_n}^{1/2}(\chi_{1,v} \boxtimes \cdots \boxtimes \chi_{n,v}) \otimes 1_{U_n(F_v)}$ の唯一の不分岐組成因子に同型となる (*cf.* Theorem 5.26)。詳しくは, [Bum] §3.3 を見よ。

Definition 1.5. カスプ保型表現 $\pi \cong \otimes'_v \pi_v$ に対して, F の Hecke 指標 χ による twisted 部分 L-関数 を

$$L^S(s;\pi\times\chi) \;:=\; \prod_{v\notin S} L_v(s;\pi_v^\circ\times\chi_v), \quad L_v(s;\pi_v^\circ\times\chi_v) \;:=\; \det\big(I_n - A(\pi_v^\circ)\chi(\varpi)q_v^{-s}\big)^{-1}$$

と定義する。特に, χ が自明指標の時, $L^S(s;\pi\times 1)$ を $L^S(s;\pi)$ と書き, 部分標準 L-関数 と呼ぶ。但し, S は F の素点の有限集合で, 全ての無限素点を含み, その外で π_v 及び χ_v が不分岐となるもの。また, $A(\pi_v^\circ)$ は, π の不分岐成分 π_v° の 佐武パラメター である (See Definition 5.27)。 ■

ここで, $n = 2$, $F = \mathbb{Q}$ で, π_∞ が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の正則な既約表現[3]の時, $L^S(s;\pi)$ は あるカスプ形式に付随する L-関数の S の外パート $\prod_{p\notin S}\Big(1 - a_p\chi(p)p^{-s} + p^{\kappa-1}p^{-2s}\Big)^{-1}$ に一致する。つまり, $L^S(s;\pi)$ 達は, 前サブセクションに現れた L-関数たちを (S の外では) 包摂する非常に大きなクラスを成している。更に, 所謂 Langlands Philosophy は, ”数論的な研究対象から定まる L-関数は, $\mathrm{GL}(n)$ のカスプ保型表現に付随する L-関数で表示出来るであろう” ;

[2] $\mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}(n)\big)_\omega$ 及び, $\mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}(n)\big) := \cup_\omega \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}(n)\big)_\omega$ には, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ は作用しない。
[3] より正確には, Blattner パラメタ κ の 正則離散系列表現。

$$\bigcup_{n\geq 1}\Big\{\mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}(n)\big)\text{の } L\text{-関数}\Big\}\text{ ” }\supset\text{ ” }\Big\{\text{数論的 } L\text{-関数}\Big\}$$

と唱えており, 前世紀初頭より 数論の大きな研究方針の一つであり続けている。事実, 類体論の解析的言い換えである Artin 予想は, 解決された全ての場合が この方針 ($:$GL(n) の L-関数との一致) で 示されてきた。また, 上に見た modularity:谷山-Weil 予想は Fermat 予想を解決に導いたのであった。

この様に, GL(n) の L-関数は重要な研究対象であるが, 上の無限積は 右半平面 $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ でしか 絶対収束しない。そこで, 変数 $s\in\mathbb{C}$ について 解析接続することが, まず**問題**となる。さらに, 上の定義で欠け落ちている”分岐 L-因子”$L_v(s;\pi_v)$ ($v\in S$) を 然るべく定義し, 完備化した 標準 L-関数$L(s;\pi):=\prod_{v\leq\infty}L_v(s;\pi_v)$ が, 関数等式

$$L(s;\pi)\ =\ \varepsilon(s;\pi)L(1-s;\pi^\vee) \tag{1.2.1}$$

を満たすことを示すのが, 次の**問題**である。ここで, $(\pi^\vee, V_\pi^\vee)$ は, (π, V_π) の反傾表現 (*i.e.* $V_\pi^\vee := \{\varphi({}^t{*}^{-1})|\varphi\in V_\pi\}$, $\pi^\vee(g):=\pi({}^tg^{-1})$) である。

上の関数等式 (1.2.1) に現れている 大域 ε-因子$\varepsilon(s;\pi)$ は, 前サブセクションに現れた $\varepsilon(s;f\times\chi)$ や $\varepsilon(s;E)$ の広範な一般化になっていることを, 注意しておく。

§1.3. ”Good” zeta 積分 と 局所 ε-因子

前サブセクションの**問題**は, GL(n) の標準 L-関数に対して[4]は, 完全に解決されている。その示し方は 幾つかあるが, ここでは (1.1.2) の一般化である Rankin-Selberg method 即ち, $L^S(s;\pi)$ を 積分表示する方法を採り上げる。先ず このサブセクションでは, 上の**問題**に対し積分表示法が旨く働く為に満たすべき性質 と その”御利益”を アウトラインだけ紹介する。下に $**$ 等で表されているモノの 具体的なデータは, 第二節で説明される。

Definition 1.6. 大域積分 $\mathcal{Z}(s;\star\star):=\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})}\star\star\,\mathrm{d}h$ が, π の L-関数 $L(s;\pi)$ に対して ”Good” zeta 積分 であるとは, 次を満たすこととする (*cf.* [Ge-Sh] §1.7)。

(1) 大域関数等式：$\mathcal{Z}(s;\star\star)=\mathcal{Z}(1-s;\star\star^\vee)$,

(2) Euler 積分解：$\mathcal{Z}(s;\star\star)=\prod_v\{\int_{H(F_v)}**\,\mathrm{d}h_v\}$,
　右辺の各素点上の局所積分を $\mathcal{Z}_v(s;**)$ と書く,

(3) 不分岐成分：$\mathcal{Z}_v(s;**)=L_v(s;\pi_v^\circ)$, for $\forall v\notin S$,
　但し, S は F の素点の有限集合,

(4) 悪い素点での L-因子：$v\in S$ でも, 積分の族 $\{\mathcal{Z}_v(s;**)\}$ から $L_v(s;\pi_v)$ が定まる,

(5) 局所関数等式：$\mathcal{Z}_v(1-s;**^\vee)=\gamma_v(s;\pi_v,\psi_v)\times\mathcal{Z}_v(s;**)$,
　但し, ψ_v は データ $**$ に依る F_v の加法指標.

ここに $\star\star$ 及び $**$ は, 其々 π, π_v に関連する大域的データ, 局所的データを意味する。 ■

[4]一般に, 簡約アデール群 $G(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現 π と G の”L-群${}^LG$”の既約表現 r に対して, 保型 L-関数$L(s;\pi,r)$ が定義される。近年, 多くの $L(s;\pi,r)$ に対して, 上の**問題**が解決されてきたが, まだまだ 残された問題は多い。

”Good” zeta 積分が一つ見つかる[5]と, $L(s;\pi)$ の解析接続, 関数等式 (1.2.1) が得られる。更に, 局所 ε-因子 を

$$\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v) := \gamma_v(s;\pi_v,\psi_v)\frac{L_v(s;\pi_v)}{L_v(1-s;\pi_v^\vee)}$$

と 置くことで, 比例因子 $\varepsilon(s;\pi)$ が Euler 積 $\prod_v \varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v)$ に分解することまで判る。

実際, (2) より (1) の両辺は 局所積分に分解するが, (3),(4) から 次の等式を得る。

$$L(s;\pi)\times\prod_{v\in S}\frac{\mathcal{Z}_v(s;**)}{L_v(s;\pi_v)} \;=\; L(1-s;\pi^\vee)\times\prod_{v\in S}\frac{\mathcal{Z}_v(1-s;**^\vee)}{L_v(1-s;\pi_v^\vee)}.$$

この右辺の $v\in S$ 成分は, 局所関数等式 (5) により,

$$L(1-s;\pi^\vee)\times\prod_{v\in S}\gamma_v(s;\pi_v,\psi_v)\frac{L_v(s;\pi_v)}{L_v(1-s;\pi_v^\vee)}\times\frac{\mathcal{Z}_v(s;**)}{L_v(s;\pi_v)}$$

と変形できるので, $\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v)$ の決め方から,

$$L(s;\pi) \;=\; L(1-s;\pi^\vee)\times\prod_{v\in S}\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v)$$

を得る。$\prod_{v\in S}\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v) =: \varepsilon(s;\pi)$ と置けば[6], L-関数の関数等式 と ε-因子の Euler 積分解が同時に得られる。

§ 1.4. 局所表現の分岐 と 局所 ε-因子

さて, §1.2 の Langlands Philosophy と §1.1 を考え併せると, 前サブセクションで得られた 『GL(n) のカスプ保型表現 π の局所 ε-因子 $\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v)$ は, ”何某かの分岐情報” を握っているのではないか？』 と考えるのは, 自然であろう。少なくとも, π の分岐成分 π_v から $\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v)$ は定義されているのだから, 次は至極自然な問題であろう。

Problem : 局所 ε-因子 $\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v)$ をカスプ保型表現 π の分岐成分 π_v の内在的不変量 と関係づけよ。

Theorem 1.1 の一般化として, π の”レヴェル N_π”が然るべく定義され,

”$\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v)$ は N_π の v-成分の指数関数となる”

ということが, 予期される答えである。一方, Proposition 1.3 では, 関数等式の比例因子の中に, 指標 χ の Gauss 和 $\tau(\chi)$ が 現れている。Dirichlet L-関数を Hecke 指標に付随する L-関数の特別なものと見做せば, χ は GL(1) の保型表現なので, π の”Gauss 和 $\tau(\pi)$” が適切に定義され,

”$\varepsilon_v(s;\pi_v,\psi_v)$ は $\tau(\pi)$ の局所類似で表示される”

[5]一般に, 一つの保型 L-関数 $L(s;\pi,r)$ に対して, それを表示する zeta 積分は 複数存在することがある。GL(n) の標準 L-関数 $L(s;\pi)$ の場合, それを表す異なる zeta 積分が, 三つ知られている。

[6]L-関数の関数等式に於いて, $L(s;\pi)$, $L(1-s;\pi^\vee)$ 共に $\{\psi_v\}$ には無関係なので, 大域 ε-因子 $\varepsilon(s;\pi)$ は加法指標 $\{\psi_v\}$ 達の採り方に依らない。

のではないかとも考えられる。

これらの どちらもが正しく, 充分に満足のいく理論を成している。本稿では, 前者に対する Jacquet-PiatetskiShapiro-Shalika 理論を第三節で, 後者への Bushnell のアプローチを第四節で それぞれ概説する。

§ 2. Two integral presentations of the Standard L-function

ここでは, カスプ保型表現 $\pi \subset \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}(n)\big)$ の標準 L-関数を表示する"Good" zeta 積分を 二つ思い出す。前半[7]では, 古典的なフーリエ展開の一般化である Fourier-Whittaker 展開を使う Jacquet-PiatetskiShapiro-Shalika 積分を, 後半では, Hecke 指標を GL(1) のカスプ形式と見做し, $L(s;\chi)$ の岩沢-Tate 積分を一般化した Godement-Jacquet 積分を扱う。

§ 2.1. Whittaker 模型

古典的なカスプ形式のフーリエ展開 (1.1.1) を, GL_n 上のカスプ形式に拡張した Fourier-Whittaker 展開を思い出しておく。

Definition 2.1. カスプ形式 φ と 非自明な加法指標 $\psi : F\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$ に対して, その ψ_{U_n}-Whittaker 関数 を, コンパクト集合 $U_n(F)\backslash U_n(\mathbb{A})$ 上での積分

$$W_\psi^\varphi(g) \ := \ \int_{U_n(F)\backslash U_n(\mathbb{A})} \varphi(ug)\overline{\psi_{U_n}(u)}\,\mathrm{d}u$$

で定める。 ■

但し, ψ_{U_n} は 極大巾零部分群 U_n(*See* §5.1) の非退化指標

$$\begin{array}{rcl}\psi_{U_n} : U_n(F)\backslash U_n(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}^\times \\ u & \mapsto & \psi(u_{12} + \cdots + u_{n-1\,n})\end{array}$$

である。この時, ミラボリック部分群 (*See* §5.1) を巧みに用いることで, 次が示される。

Theorem 2.2 (Fourier-Whittaker 展開 ; [PS], [Sha])**.**
GL(n) 上のカスプ形式 φ に対して, 次の形の *Fourier-Whittaker* 展開 ;

$$\varphi(g) \ = \sum_{\gamma \in U_{n-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{n-1}(F)} W^\varphi\big(\left[\begin{smallmatrix}\gamma & \\ & 1\end{smallmatrix}\right]g\big) \tag{2.1.1}$$

が成り立つ。右辺の無限和は 絶対収束し, 任意のコンパクト集合上で一様である。 □

Proof. [Cog] pp.103-105 を見よ。 □

[7] §2.1,§2.2 は, [石川] Chap.1 の抜き書きになっている。そこには $\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(m)$ の convolution L-関数の積分表示について より包括的な説明があるので, 併せて見られたい。

その決め方から, φ の ψ_{U_n}-Whittaker 関数は,

$$W_\psi^\varphi(ug) \;=\; \psi_{U_n}(u) W_\psi^\varphi(g), \qquad \forall u \in U_n(\mathbb{A})$$

を満たす。つまり, W_ψ^φ は誘導表現 $\mathrm{Ind}_{U_n(\mathbb{A})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})}\psi_{U_n}$ に属する。また, 保型表現 (π, V_π) の元 φ に, その ψ_{U_n}-Whittaker 関数を対応させる射は,

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K_\infty)\times \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})}\big(\pi, (\mathrm{Ind}_{U_n(\mathbb{A})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})}\psi_{U_n})_{\mathrm{mg}}\big)$$

の元 Λ_ψ を与える。ここで, $\mathfrak{g}_\mathbb{C} := \prod_{v|\infty}\mathfrak{gl}_n(F_v)\otimes\mathbb{C}$, $K_\infty := \prod_{v|\infty} K_v$, $(\mathrm{Ind}_{U_n(\mathbb{A})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})}\psi_{U_n})_{\mathrm{mg}}$ は, Archimedean 成分を $\mathrm{Ind}_{U_n(F_v)}^{\mathrm{GL}_n(F_v)}\psi_{U_n}$ 全体ではなく, 緩増加関数の成す部分空間 $(\mathrm{Ind}_{U_n(F_v)}^{\mathrm{GL}_n(F_v)}\psi_{U_n})_{\mathrm{mg}}$ に取り替えたものを表す。実は, この intertwiner Λ_ψ は 定数倍を除いて 一意である：

Theorem 2.3 (Whittaker 模型の一意性；[Sha]).
π が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の既約許容表現なら, 任意の加法指標 ψ に対して,

$$\dim_\mathbb{C} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K_\infty)\times \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})}\big(\pi, (\mathrm{Ind}_{U_n(\mathbb{A})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})}\psi_{U_n})_{\mathrm{mg}}\big) \;\leq\; 1$$

が成り立つ。 □

上で 次元が 1 となる 既約許容表現 π を generic [8]と呼び, Theorem 中の Hom-空間の生成元 Λ_ψ を Whittaker 汎関数 と言う。

Proof. これは, アデール群の既約許容表現の分解 $\pi \cong \otimes'_v \pi_v$ (*cf.* [G-G-PS], [Fla]) と次の局所類似 Theorem 2.4 から 従う。 □

Theorem 2.4 (局所一意性；[Ge-Ka] for p-adic F_v, [Sha] for general F_v).
$\mathrm{GL}_n(F_v)$ の任意の既約許容表現 π_v に対し,

$$\dim_\mathbb{C} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F_v)}\big(\pi_v, \mathrm{Ind}_{U_n(F_v)}^{\mathrm{GL}_n(F_v)}\psi_{U_n}\big) \;\leq\; 1$$

が成り立つ。但し, $v|\infty$ の時は, $(\mathrm{Ind}_{U_n(F_v)}^{\mathrm{GL}_n(F_v)}\psi_{U_n})_{\mathrm{mg}}$ に取り替える。 □

上で次元が 1 となる既約許容表現 π_v を generic [9]と呼び, intertwining space の生成元を Λ_{ψ_v} と書く。また, $\xi_v \in V_{\pi_v}$ の Λ_{ψ_v} による像を, $W_v^{\xi_v}$ と書き, 局所 Whittaker 関数と呼ぶ。それらの成す空間を $\mathcal{W}_\psi(\pi_v) \;:=\; \{W_v^{\xi_v} \mid \xi_v \in V_{\pi_v}\}$ とする。

Fact：任意の generic 表現 π_v に対して, $\mathrm{GL}_n(F_v)$-同型 $V_{\pi_v} \cong \mathcal{W}_\psi(\pi_v)$ が成り立つ。

Proof. $\mathrm{GL}_n(F_v)$ 上の超関数で,

$$B(n_1 g n_2) = \psi_{U_n}(n_1) B(g) \psi_{U_n}(n_2), \quad \forall n_1, n_2 \in U_n(F_v)$$

を 満たすものを Bessel 超関数 という。$\mathrm{Ind}_{U_n(F_v)}^{\mathrm{GL}_n(F_v)}\psi_{U_n}$ から, 自分自身への $\mathrm{GL}_n(F_v)$-intertwiner は, 全て Bessel 超関数 B との畳み込みで 与えられる。

[8] π がカスプ保型表現なら, Shalika の定理 (Definition 5.18 の脚注) により, π は generic である。
[9] generic な π_v の分類については, Appendix §5.5 を見よ。

$$\mathrm{supp}\ B\ \subset\ \left\{U_n(F_v)\begin{bmatrix} & & I_{r_k}\\ & \iddots & \\ I_{r_1} & & \end{bmatrix}U_n(F_v)\ \in\ U_n(F_v)\backslash \mathrm{GL}_n(F_v)/U_n(F_v)\right\}$$

と 対合 $g\mapsto g^\sigma := J_n g J_n$ で Bessel 超関数 B が不変であることより,

$$B*B' = (B*B')^\sigma = B'^\sigma * B^\sigma = B'*B, \qquad \forall B, B'$$

となり, $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_n(F_v)}(\mathrm{Ind}_{U_n(F_v)}^{\mathrm{GL}_n(F_v)}\ \psi_{U_n})$ は可換。適切に順を入替ると 部分表現と見做せるので, $\mathrm{Ind}_{U_n(F_v)}^{\mathrm{GL}_n(F_v)}\psi_{U_n}$ の組成成分に現れる表現は, Schur の補題により, 全て重複度が 1 以下と判る。 □

カスプ形式 φ の 同型 $\pi\cong\otimes_v'\pi_v$ による像が $\otimes_v\xi_v$ の形であるとする。上の一意性定理により,

$$W^\varphi(g)\ =\ (\mathrm{const})\times\prod_v W_v^{\xi_v}(g_v) \tag{2.1.2}$$

であり, 正規化をすれば 比例定数も 1 に採れる。

§ 2.2. Jacquet-PiatetskiShapiro-Shalika 積分

古典的な保型 L-関数 $L(s;f)$ の解析接続, 関数等式を示す際, その積分表示 (1.1.2) が証明の要であった。ここで, (1.1.2) は f の Mellin 変換であった。そこで, GL(n) 上のカスプ形式 φ の"Mellin 変換型積分"

$$\int_{\mathrm{GL}_1(F)\backslash\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})}\varphi\big|_{\mathrm{GL}_1}(\begin{bmatrix} x & \\ & I_{n-1}\end{bmatrix})\ \chi(x)\ |x|^{s-\frac{n-1}{2}}\ \mathrm{d}x$$

が, φ が生成するカスプ保型表現 π の χ-twisted L-関数 $L(s;\pi\times\chi)$ の "Good" zeta 積分を与えるのではないか と期待するのは自然であろう。しかし, この積分は, $n=2$ でない限り Euler 積に分解しない。そこで, 上の積分を次の様に 修正する。

Definition 2.5. カスプ形式 φ の Jacquet-PiatetskiShapiro-Shalika 積分 を

$$\mathcal{Z}(s;\varphi,\chi)\ :=\ \int_{\mathrm{GL}_1(F)\backslash\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})}(\mathbb{P}^n\varphi)(\begin{bmatrix} x & \\ & 1\end{bmatrix})\chi(x)|x|^{s-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

で定める。但し, $\mathbb{P}^n$ は GL(2) のミラボリック部分群 $P_{mir}^{\mathrm{GL}_2}$ への射影

$$(\mathbb{P}^n\varphi)(p)\ :=\ \frac{1}{|\det p|^{\frac{n-2}{2}}}\int_{N_{(2,1,\ldots,1)}(F)\backslash N_{(2,1,\ldots,1)}(\mathbb{A})}\varphi(n\left[\begin{array}{c|c} p & \\ \hline & I_{n-2}\end{array}\right])\ \overline{\psi_{U_{n-2}}(u_n)}\mathrm{d}n$$

である。$n=\left[\begin{array}{c|c} I_2 & * \\ \hline & u_n\end{array}\right]$, $u_n\in U_{n-2}$ の形であることに注意。 ■

$\mathbb{P}^n$ の積分域は, 巾零多様体なので コンパクトであり, この積分は絶対収束する。また, $\mathcal{Z}(s;\varphi,\chi)$ は, 任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して 絶対収束し, 任意のコンパクト集合上一様収束している。従って, s の正則関数を定義することに注意する。

カスプ形式 $\varphi \in (\pi, V_\pi)$ に対し, $\varphi^\vee(g) := \varphi({}^t g^{-1})$ と置くと, $\varphi^\vee \in (\pi^\vee, V_\pi^\vee)$ である。対合 $(\iota : g \mapsto {}^t g^{-1}) \in \mathrm{Aut}\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})\big)$ を用いて定義する"別の"大域積分[10]

$$\mathcal{Z}^\vee(s;\varphi,\chi) \ := \ \int_{GL_1(F)\backslash GL_1(\mathbb{A})} (\iota \circ \mathbb{P}^n \circ \iota\, \varphi)(\left[\begin{smallmatrix} x & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right])\chi(x)|x|^{s-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

と $\mathcal{Z}(s;\varphi,\chi)$ の間に 次の関数等式が成り立つことが変数変換により示される。

Proposition 2.6 (解析接続, 大域関数等式)**.**
大域積分 $\mathcal{Z}(s;\varphi,\chi)$ は, s の関数として全複素平面に 正則に解析接続されて,

$$\mathcal{Z}(s;\varphi,\chi) \ = \ \mathcal{Z}^\vee(1-s;\varphi^\vee,\overline{\chi})$$

という関数等式を満たす。但し, $^-$ は 複素共役を意味する。 □

また, $\mathbb{P}^n$ で修正したことにより, 次の様に局所積分の積に分解する;

Proposition 2.7 (Basic Identity)**.**
カスプ形式 φ の ψ_{U_n}-*Whittaker* 関数を W^φ とすると

$$\mathcal{Z}(s;\varphi,\chi) \ = \ \int_{\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})} W^\varphi\Big(\left[\begin{array}{cc|c} x & & \\ & 1 & \\ \hline & & I_{n-2} \end{array}\right]\Big)\chi(x)|x|^{s-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x$$

が $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で成り立つ。 □

Proof. $P_{mir}^{\mathrm{GL}_2}$ 上の関数 $\mathbb{P}^n\varphi$ は カスピダルであり, その Fourier-Whittaker 展開は

$$(\mathbb{P}^n\varphi)(\left[\begin{smallmatrix} x & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right]) \ = \ |x|^{-\frac{n-2}{2}} \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_1(F)} W^\varphi\Big(\left[\begin{array}{cc|c} \gamma & & \\ & 1 & \\ \hline & & I_{n-2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} x & & \\ & 1 & \\ \hline & & I_{n-2} \end{array}\right] \Big)$$

となる。これを $\mathcal{Z}(s;\varphi,\chi)$ に代入し, $\chi(\gamma x) = \chi(x)$, for $\forall \gamma \in \mathrm{GL}_1(F)$ を使うと良い。 □

この Proposition と $\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v)$, 前サブセクションの結果 (2.1.2) により,

$$\mathcal{Z}(s;\varphi,\chi) \ = \ \prod_v \int_{\mathrm{GL}_1(F_v)} W_v^{\xi_v}\big(\mathrm{diag}(x_v, I_{n-1})\big)\chi_v(x_v)|x_v|^{s-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x_v$$

が $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で[11]成り立つ。右辺の局所積分を $\mathcal{Z}_v(s;W_v,\chi_v)$ と書くことにする。

$\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ が $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ を満たす時, λ は <u>支配的である</u> という。λ に対し, $\rho_\lambda : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_\lambda)$ を支配的ウェイトが $\begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{bmatrix} \mapsto (t_1^{\lambda_1}\cdots t_n^{\lambda_n})$ となる既約表現 $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ とする。π_v が不分岐な時, その spherical vector ξ_v° (*See* Definition 5.25) に対応する不分岐 Whittaker 関数 $W_v^\circ(*) := \Lambda_{\psi_v}\big(\pi_v(*).\xi_v^\circ\big)$ は, 次の様に表示出来る。

[10] この積分 $\mathcal{Z}^\vee(s;\varphi,\chi)$ は, 局所積分の Euler 積には分解するが, このままでは 不分岐成分ですら $L(s;\pi^\vee \times \overline{\chi})$ とは 結びつかない。"unipotent 積分"が現れるからである。その処理については, [石川] §1.2.5 を見よ。
[11] もし π_v が unitary なら, 局所積分は $\mathrm{Re}\, s \geq 1$ で絶対収束する。更に, π_v が tempered なら, $\mathrm{Re}\, s > 0$ まで絶対収束域が延びる。unitary 表現, tempered 表現については, 各々 Appendix §5.6, §5.4 を見よ。

Proposition 2.8 (不分岐 Whittaker 関数の明示公式；[Shin]).
$\mathrm{GL}_n(F_v)$ の 不分岐 *Whittaker* 関数 W_v°, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し,

$$W_v^\circ\Big(\begin{bmatrix} \varpi^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{\lambda_n} \end{bmatrix}\Big) \ = \ \begin{cases} \delta_{B_n}^{1/2}\Big(\begin{bmatrix} \varpi^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{\lambda_n} \end{bmatrix}\Big) \times \mathrm{tr}\Big\{\rho_\lambda\big(A(\pi_v^\circ)\big)\Big\} & \text{if } \lambda : \text{支配的} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。 □

この明示公式により,「不分岐表現の局所積分は, L-因子に一致する」ことが判る；

Proposition 2.9 (不分岐成分).
π_v, χ_v 共に不分岐の時, π_v の不分岐 *Whittaker* 関数を W_v° とする。局所積分は

$$\mathcal{Z}_v(s; W_v^\circ, \chi_v) \ = \ L_v(s; \pi_v \times \chi_v)$$

と *twisted* L-関数の 不分岐 L-因子を与える。 □

§ 2.3. 行列要素

Definition 2.10. $\mathrm{GL}(n)$ のカスプ保型表現 (π, V_π) に対し, $\varphi \in V_\pi$, $\varphi^\vee \in V_\pi^\vee$ に関する <u>行列要素</u> を Petersson 内積

$$c_{\varphi,\varphi^\vee}(g) \ := \ \int_{Z(\mathbb{A})\mathrm{GL}_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})} \varphi(g'g)\, \varphi^\vee(g')\, \mathrm{d}g'$$

で定める。 ■

$\pi \cong \otimes_v' \pi_v$, $\pi^\vee \cong \otimes_v' \pi_v^\vee$ の時, 各局所成分間の ペアリングを $<\,,\,>_v$ と書く。π と $\pi^\vee$ の ペアリングは, 定数倍を除いて unique なので, $<\,,\,>= \prod_v <\,,\,>_v$ と分解する。従って, カスプ形式達の局所成分を 各々$\pi \ni \varphi \mapsto \otimes_v \xi_v \in \otimes_v' \pi_v$, $\pi^\vee \ni \varphi^\vee \mapsto \otimes_v \xi_v^\vee \in \otimes_v' \pi_v^\vee$ と書くと, Petersson 内積は π_v の行列成分の積に 分解する;

$$< \pi(g)\varphi, \varphi^\vee > \ = \ \prod_{v \le \infty} < \pi_v(g_v)\xi_v\,,\, \xi_v^\vee >_v . \tag{2.3.1}$$

右辺の π_v の ξ_v に関する行列要素を $c_{\xi_v,\xi_v^\vee}(g_v) :=< \pi_v(g_v).\xi_v, \xi_v^\vee >_v$ と書く。この $\mathrm{GL}_n(F_v)$ 上の関数は, 任意の[12] 既約許容表現 π に対して定義される ことに注意せよ。

§ 2.4. Godement-Jacquet 積分

Definition 2.11. $\mathrm{GL}(n)$ の[13]任意のカスプ形式 φ と $\mathrm{M_n}(\mathbb{A})$ 上の Schwartz 関数 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathrm{M_n}(\mathbb{A}))$ に対し, <u>Godement-Jacquet 積分</u> を, φ, $\varphi^\vee$ に関する行列要素 と Φ の積の

[12] これに比して, Whittaker 関数は, generic な π_v に対してしか定義されない。$n = 2$ の場合は, π_v が無限次元なら 必ず generic であるが, 一般の n では, 多くの π_v は generic でない (*cf.* Appendix §5.5)。

[13] $n = 1$ の時, φ は Hecke 指標 χ であり, その行列要素 $c_{\varphi,\varphi^\vee}(g)$ は $\chi(g)$ に過ぎない。従って, Godement-Jacquet 積分は, <u>Tate 積分</u> の $\mathrm{GL}(n)$ への拡張になっていることに注意せよ。

Mellin 型積分変換

$$\mathcal{Z}(s;\, c_{\varphi,\varphi^\vee}, \Phi) \;:=\; \int_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})} c_{\varphi,\varphi^\vee}(g)\, \Phi(g)\, |\det g|^s \, \mathrm{d}g$$

として定義する。 ■

この積分は $\mathrm{Re}\, s > n$ で絶対収束する ([Go-Ja] p.164)。

ここで, $\mathrm{d}X$ を $(X,Y) \mapsto \psi(\mathrm{tr}XY)$ に関して自己双対な $\mathrm{M_n}(\mathbb{A})$ 上の Haar 測度として, Φ の Fourier 変換 $\widehat{\Phi}$ を $\widehat{\Phi}(Y) := \int_{\mathrm{M_n}(\mathbb{A})} \Phi(X)\psi(\mathrm{tr}XY)\mathrm{d}X$ で定めると, 次が成り立つ。

Proposition 2.12 (解析接続, 大域関数等式 ; [Go-Ja] Thm.12.4)**.**
大域積分 $\mathcal{Z}(s; c_{\varphi,\varphi^\vee}, \Phi)$ は, 全 s-平面に 正則に解析接続されて, 関数等式

$$\mathcal{Z}(s;\, c_{\varphi,\varphi^\vee}, \Phi) \;=\; \mathcal{Z}(n-s;\, c^\vee_{\varphi,\varphi^\vee}, \widehat{\Phi})$$

を満たす。但し, $c^\vee_{\varphi,\varphi^\vee}(g) = c_{\varphi,\varphi^\vee}(g^{-1}) = c_{\varphi^\vee,\varphi}(g)$ に注意。 □

また, 行列要素の Euler 積分解 (2.3.1) により, 次が従う。

Proposition 2.13 (Basic Identity ; [Go-Ja])**.**
同型 $\pi \cong \otimes'_v \pi_v$ による カスプ形式 φ の像を $\otimes_v \xi_v$ として, π_v の ξ_v に関する行列要素を $c_{\xi_v,\xi_v^\vee}(g_v) :=< \pi_v(g_v).\xi_v, \xi_v^\vee >_v$ と置くと, 大域 *Godement-Jacquet* 積分は,

$$\mathcal{Z}(s;\, c_{\varphi,\varphi^\vee}, \Phi) \;=\; \prod_v \int_{\mathrm{GL}_n(F_v)} c_{\xi_v,\xi_v^\vee}(g_v) \Phi_v(g_v) |\det g_v|^s \mathrm{d}g_v$$

と, 局所積分の *Euler* 積に分解する。但し, $\Phi = \otimes_v \Phi_v \in \bigotimes_v \mathcal{S}\big(\mathrm{M}_n(F_v)\big)$ である。 □

上 Proposition 右辺の局所積分を, $\mathcal{Z}_v(s; \xi_v, \xi_v^\vee, \Phi_v)$ と書く。π_v が不分岐な時, この局所積分は π_v に付随する L-因子を表す ;

Proposition 2.14 (不分岐解析 ; [Go-Ja] Lemma 6.10)**.**
不分岐表現 $\pi_v \in \mathrm{GL}(\mathrm{GL}(n))^\wedge_{sphl}$ が, $I^{\mathrm{GL}_n(F_v)}_{B_n(F_v)}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ (*cf.* *§5.1*) に (χ_i 達は 不分岐指標) 埋め込まれる時, その不分岐ヴェクトル ξ_v° での行列成分 $c_{\xi_v^\circ,\xi_v^{\circ\vee}}$ と $\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_F)$ の特性関数 Φ_v° に 付随する *Godement-Jacquet* 積分の局所成分は, 不分岐 L 因子を与える ;

$$\mathcal{Z}_v(s + \frac{n-1}{2}; \xi_v^\circ, \xi_v^{\circ\vee}, \Phi_v^\circ) \;=\; \prod_{i=1}^n L_v(s;\chi_i) \;=\; L_v(s;\pi_v)$$

Proof. 先ず, $\xi_v^\circ, \xi_v^{\circ\vee}$ が 不分岐ヴェクトルであるので, π_v の球関数 $c_{\xi_v^\circ,\xi_v^{\circ\vee}}$ は

$$c_{\xi_v^\circ,\xi_v^{\circ\vee}}(g_v) \;=\; \int_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)} \xi_v^\circ(g_v k_v)\, \mathrm{d}k_v$$

と表示できることに注意する。以下, $\mathrm{GL}_n(F_v)$ と その極大コンパクト部分群 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)$ を各々G,K と記し, 添字 v も省略する。左辺の局所積分は, 絶対収束域 $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ に於いて,

$$\int_G \Big(\int_K \xi_v^\circ(gk)\mathrm{d}k \Big) \Phi_v^\circ(g) |\det g|^{s+\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}g \;=\; \int_K \int_G \xi_v^\circ(gk) \Phi_v^\circ(g) |\det g|^{s+\frac{n-1}{2}}\, \mathrm{d}g\, \mathrm{d}k$$

となる。測度 $\mathrm{d}k$ は $\mathrm{Vol}(K)=1$ と正規化しておく。$gk=g'$ と変数変換し, $\Phi_v^\circ(g'k^{-1})=\Phi_v^\circ(g')$ 及び $|\det k|=1$ に注意すると, 上積分は $\int_G \xi_v^\circ(g')\Phi_v^\circ(g')|\det g'|^{s+\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}g'\times\big(\int_K \mathrm{d}k\big)$ となる。ここで, 岩澤分解 $G=B_nK$ に伴う測度の分解を $\mathrm{d}g=\mathrm{d}b\,\mathrm{d}k$ とする時,

$$\mathrm{d}b \;=\; \prod_{i=i}^{n}\frac{\mathrm{d}^\times a_i}{|a_i|^{n-i}}\times\prod_{j<k}\mathrm{d}u_{j,k},\quad \mathrm{d}k=\big(\mathrm{d}g \text{ の } K \text{ への制限}\big)$$

とできる。但し, a_i,$u_{j,k}$ は $b\in B_n$ の (i,i)-, (j,k)-成分, $\mathrm{d}^\times a_i$,$\mathrm{d}u_{j,k}$ は $\mathrm{Vol}(\mathcal{O}_v^\times)=1$, $\mathrm{Vol}(\mathcal{O}_v)=1$ と正規化した Haar 測度である。ここで, $I_{B_n}^G(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ の唯一の不分岐ヴェクトル ξ_v° は, スカラー倍を除いて, $\xi_v^\circ(bk)=\delta_{B_n}(b)^{1/2}\times\big(\chi_1\boxtimes\cdots\boxtimes\chi_n\big)(b)$ となる。modulus character は, $\delta_{B_n}(b)=\prod_{i=i}^n|a_i|^{n+1-2i}$(*cf.* §5.1 脚注) なので, 問題の積分は

$$\begin{aligned}
&=\int_{B_n}\Big(\prod_{i=i}^{n}|a_i|^{\frac{n+1}{2}-i}\chi_i(a_i)\Big)\,\mathrm{ch}_{\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_v)}(b)\prod_{i=i}^{n}|a_i|^{s+\frac{n-1}{2}}\prod_{i=i}^{n}\frac{\mathrm{d}^\times a_i}{|a_i|^{n-i}}\prod_{j<k}\mathrm{d}u_{j,k}\\
&=\prod_{i=i}^{n}\int_{F_v^\times}\mathrm{ch}_{\mathcal{O}_v}(a)\,\chi_i(a)\,|a|^s\mathrm{d}^\times a \;=\; \prod_{i=i}^{n}L(s;\chi_i)
\end{aligned}$$

と判る。最後の等式は, Hecke L-関数の 岩澤-Tate 積分表示による。 □

§ 3. Mirabolic conductors

ここでは, Jacquet-PiatetskiShapiro-Shalika 積分が, $\mathrm{GL}(n)$ の標準 L-関数 $L(s;\pi)$ に対して "Good" zeta 積分であることを思いだし, そこから定まる局所 ε-因子が, 特殊な parahoric 部分群により定義される π_v の不変量と関係付けられる[14]ことを見る。これ以降の議論は 全て 非 Archimedean 局所的なので, F_v,π_v などの添字 v は省略する。つまり, F は p-進体, π は $G:=\mathrm{GL}_n(F)$ の既約許容表現と了解する。また, $\mathcal{O}_v$ は $\mathcal{O}_F$, $\mathcal{P}_v$ は $\mathcal{P}_F$ と改める。

§ 3.1. Mirabolic parahoric 部分群 K_j^{mir}

極大コンパクト部分群 $K:=\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ の部分群で, 素イデアル $\mathcal{P}_F$ での reduction map による像が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の $\mathrm{GL}(n)$ の放物部分群 $P_{\underline{n}}$(*See* §5.1) になるものを, $P_{\underline{n}}$ に付随する parahoric 部分群 という。特に $\underline{n}=(1,\ldots,1)$ の時の $J:=\ker\big(\mathrm{mod}\,\mathcal{P}_F:\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)\twoheadrightarrow B(\mathbb{F}_q)\big)$ が 岩堀部分群[15]であり, 要所で重要な役割を果たす。しかし, このセクションで活躍するのは $\underline{n}=(n-1,1)$ の場合である。

[14] $\pi\subset\mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}(2)\big)$ の場合は, [Cas], [Del] を見よ。[Ja-PS-Sh-2] は, $\mathrm{GL}_n(F_v)$ への一般化である。

[15] $V_\pi^K\neq\{0\}$ なる (π,V_π) を不分岐表現と言った (*cf.* Appendix §5.7) が, $V_\pi^K=\{0\}$, $V_\pi^J\neq\{0\}$ なる (π,V_π) を 馴分岐表現 と言う。これは, 局所 Langlands correspondence ([Ha-Ta], [Hen]) で対応する n-次元 Galois 表現 (ρ,V_ρ) が, 馴分岐 (*i.e.* $V_\rho^{I_F}\neq\{0\}$, I_F は惰性群) であることによる。

Definition 3.1. $j \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{GL}_n(F)$ の mirabolic parahoric 部分群K_j^{mir} を

$$K_j^{mir} := \left[\begin{array}{ccc|c} \mathcal{O}_F & \cdots & \mathcal{O}_F & \mathcal{O}_F \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathcal{O}_F & \cdots & \mathcal{O}_F & \mathcal{O}_F \\ \hline \mathcal{P}_F^j & \cdots & \mathcal{P}_F^j & 1+\mathcal{P}_F^j \end{array}\right]^\times \supset {}^tH(j) := \left[\begin{array}{ccc|c} \mathcal{O}_F & \cdots & \mathcal{O}_F & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathcal{O}_F & \cdots & \mathcal{O}_F & 0 \\ \hline \mathcal{P}_F^j & \cdots & \mathcal{P}_F^j & 1 \end{array}\right]^\times$$

で定義する。また, $K_0^{mir} := K$ とおく。($H(j)$ は Theorem 3.12 の証明で使われる) ■

$n = 2$ の時, K_j^{mir} は $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ の場合の adelized $\Gamma_1(p^j)$ に当たる ことに注意せよ。上の mirabolic parahoric 部分群たちは, G の filtration

$$G \supset K \supset K_1^{mir} \supset K_2^{mir} \supset \cdots$$

を与えるが, このコンパクト部分群列こそが, $\mathrm{GL}_n(F)$ の generic 表現の重要な内在的不変量を定義するのである。

§3.2. 許容表現の K_j^{mir}-fixed パート と new vector

Definition 3.2. 任意の既約 generic 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ に対し, 非負整数

$$f^{alg}(\pi) := \min\left\{j \in \mathbb{Z}_\geq \mid V_\pi(j) \neq \{0\}\right\}$$

を π の 導手(algebraic conductor) と呼ぶ。但し, $V_\pi(j) := V_\pi^{K_j^{mir}}$ と (π, V_π) の K_j^{mir}-fixed パートを略記した。 ■

Proposition 3.3 ([Ja-PS-Sh-2] Thm.5.1)**.**
任意の既約 *generic* 表現 (π, V_π) に対し, 最初の非自明 *fixed* パートは, 常に存在し 一次元である。つまり

$$f^{alg}(\pi) < \infty, \qquad \dim_\mathbb{C} V_\pi\big(f^{alg}(\pi)\big) = 1$$

が成り立つ。 □

この $K_{f^{alg}(\pi)}^{mir}$-fixed パートの生成元[16]を ξ^{new} と書き, (π, V_π) の new vector と呼ぶ。導手 $f^{alg}(\pi)$ が 0 の時は, π は 不分岐 (spherical) 表現であり, ξ^{new} は (π, V_π) の spherical vector ξ_v° (*cf.* Appendix §5.7) に他ならない[17]ことに注意せよ。

§3.3. 分岐 L-因子 と ε-因子

π が 不分岐でない時にも L-因子を定義するために, Whittaker 関数 W を 動かして, 局所積分の族

$$ZI^{JPSS}(\pi, \chi) := \left\{\mathcal{Z}(s; W, \chi) \;\middle|\; W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)\right\}$$

[16] (π, V_π) が generic でないと, $\dim_\mathbb{C} V_\pi\big(f^{alg}(\pi)\big) = 0$ となり得る (*cf.* [Ja-PS-Sh-2] Rem.5.4)。

[17] new vector ξ^{new} に対応する Whittaker 関数 $W^{new}(*) := \Lambda_\psi\big(\pi(*).\xi^{new}\big)$ は, その積分変換 $\mathcal{Z}(s; W^{new}, \chi)$ 自身が π の L-因子 $L(s; \pi \times \chi)$ に一致する。これは, 不分岐な場合 (Proposition 2.9) の拡張になっている。ξ^{new} の存在は, 積分表示を通じて L-関数の特殊値を研究する際, 重要な役割を果たす。

を考察する。Whittaker 関数の原点近傍での漸近展開[18]

Lemma 3.4 (Whittaker 関数の漸近展開；[Ja-PS-Sh-1] Prop.2.2)**.**
各 W に対し, 有限個の $T_n(F_v)$-*finite* 関数 $\{\chi_1, \ldots, \chi_{M_\pi}\}$ と *Schwartz-Bruhat* 関数 $\phi_i \in \mathcal{S}(F_v^{n-1})$ が在り, $\forall a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in T_n(F_v)$ で

$$W(\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}) \;=\; \sum_{i=1}^{M_\pi} \chi_i(\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}) \times \phi_i\big(\frac{a_1}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\big)$$

を満たす。 □

を用いると

Proposition 3.5 ([Ja-PS-Sh-3])**.**
任意の既約 *generic* 表現 π と 指標 χ に対し, 局所積分 $\mathcal{Z}(s; W, \chi)$ は, $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で収束し, q^{-s} の有理関数を与える。 □

この事実を使い, 分岐表現 π に対しても 局所 L-因子が 次の様に定められる。

Definition 3.6. q^{-s} の有理関数の族 $ZI^{JPSS}(\pi, \chi)$ の共通分母たる q^{-s} の多項式で, 定数項が 1 のものを $P_{\pi,\chi}(q^{-s})$ と (χ が自明指標の時, $P_\pi(q^{-s})$ と略記) する。つまり, 全ての積分 $\mathcal{Z} \in ZI^{JPSS}(\pi, \chi)$ に対して, $P(q^{-s})\mathcal{Z}(s; W, \chi)$ が s の正則関数になる様な多項式 $P(X)$ で次数最小のものを 採っている。既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ の χ-twisted局所 L-因子 を

$$L(s; \pi \times \chi) \;:=\; \frac{1}{P_{\pi,\chi}(q^{-s})}$$

と 共通分母の逆数として定義する。 ■

ここで, 局所積分 $\mathcal{Z}(s; W, \chi)$ を $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ 上の線形形式と見做すと, これは 各 $s \in \mathbb{C}$ に対し定まる 線形形式の空間

$$\mathcal{LF}_s := \big\{ Z_s \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(\mathcal{W}_\psi(\pi)\,,\, \mathbb{C}\big) \mid Z_s(\pi(x)W) = |x|^{-s+\frac{n-1}{2}} Z_s(W),\; \forall x \in \mathrm{GL}_1(F_v) \big\}$$

に属している。単純な変数変換から, $\mathcal{Z}(1-s; W_v^\vee, \overline{\chi})$ も $\mathcal{LF}_s$ に属すことが判る。ところが, Bluhat 理論を使い

Proposition 3.7 (Generic Uniqueness；[Ja-PS-Sh-3])**.**
有限個の例外 q^{-s} 値を 除いて, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{LF}_s = 1$ である。 □

が 示されるので,

[18] Lemma に現れる $T_n(F_v)$-finite 関数 とは, $T_n(F_v)$-作用で得られる関数達の張る空間が 有限次元となる連続関数のことを言う。

Proposition 3.8 (局所関数等式)**.**
任意の *Whittaker* 関数 $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$ に対して, *generic* 表現 π, 指標 χ と 加法指標 ψ にしか依らない q^{-s} の有理関数 $\gamma_v(s;\pi\times\chi,\psi)$ が存在し, 次が成り立つ；

$$\mathcal{Z}(1-s;W^\vee,\overline{\chi}) \;=\; \chi(-1)^{n-1}\gamma(s;\pi\times\chi,\psi)\times\mathcal{Z}(s;W,\chi) \qquad \blacksquare$$

上の比例因子 $\gamma(s;\pi\times\chi,\psi)$ を修正することで, §1.4 **Problem** の主人公の一方である 局所 ε-因子が 次の様に定義される。

Definition 3.9. 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ に対し, その χ-twisted局所 ε-因子[19]を

$$\varepsilon(s;\pi\times\chi,\psi) \;:=\; \gamma(s;\pi\times\chi,\psi)\frac{L(s;\pi\times\chi)}{L(1-s;\pi^\vee\times\overline{\chi})}$$

と定義する。 $\blacksquare$

上の局所関数等式と $L(s;\pi\times\chi)$ の決め方 から, s の正則関数の等式

$$\frac{\mathcal{Z}(1-s;W^\vee,\overline{\chi})}{L(1-s;\pi^\vee\times\overline{\chi})} \;=\; \chi(-1)^{n-1}\varepsilon(s;\pi\times\chi,\psi)\times\frac{\mathcal{Z}(s;W,\chi)}{L(s;\pi\times\chi)}$$

を得る。この関数等式を 二回使うことで, 次を得る。

Proposition 3.10 ([Ja-PS-Sh-3] Thm.2.7)**.**
任意の 指標 χ と *generic* 表現 π に対して,

$$\varepsilon(s;\pi\times\chi,\psi) \;=\; c\times\left(q^{-s}\right)^N$$

なる定数 $c\in\mathbb{C}^\times$, $N\in\mathbb{Z}_\geq$ が存在する。 $\square$

§ 3.4. 最小 K_j^{mir}-fixed パート と ε-因子

このサブセクションでは, Hecke 指標 χ が $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ の自明表現 1 の場合を考える。上の Proposition 3.10 から, π の局所 ε-因子 $\varepsilon(s;\pi\times 1,\psi)=c\times(q^{-s})^N$ に現れる N は, π と ψ にのみ依る。更に, 加法指標 ψ は 不分岐指標 (*i.e.* $\psi|_{\mathcal{O}_F}=1$ かつ $\psi|_{\mathcal{P}_F^{-1}}\neq 1$) に採る。

Definition 3.11. 任意の generic 表現 π に対し, 加法指標 ψ が不分岐な局所 ε-因子 $\varepsilon(s;\pi\times 1,\psi)=\varepsilon(0;\pi\times 1,\psi)\times\left(q^{-s}\right)^{f^{an}(\pi)}$ の冪指数 $f^{an}(\pi)$ を π の analytic conductor と呼ぶ。 $\blacksquare$

次の Jacquet 達の結果は, Theorem 1.1 の非常に広範な一般化と見做せる。

Theorem 3.12 (mirabolic conductor；[Ja-PS-Sh-2] Thm.5.1)**.**
任意の *generic* 表現 $\pi\in\mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ に対し,
(1) $f^{an}(\pi)=0$ となるのは, π が不分岐な場合に限る。
(2) $f^{an}(\pi)>0$ なら, π の *analytic conductor* は導手に一致する：$f^{an}(\pi)=f^{alg}(\pi)$。 $\square$

[19] π, χ が 共に不分岐の時, その決め方から $\varepsilon(s;\pi\times\chi,\psi)=1$ であることに注意せよ。

この定理の証明の為に, 少々準備をする。
$\pi'^{\circ} \in \mathrm{GL}(n-1)^{\wedge}_{sphl}$ を, 佐武パラメターが $\mathrm{diag}\big(\chi'_1(\varpi), \ldots, \chi'_{n-1}(\varpi)\big)$ の $\mathrm{GL}_{n-1}(F)$ の不分岐表現とする。$W \in \mathcal{W}_{\psi}(\pi)$ に対し, π'° の $\overline{\psi_{U_{n-1}}}$-不分岐 Whittaker 関数との convolution

$$\mathcal{Z}(X; W, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1}) \ := \ \int W\big|_{\mathrm{GL}_{n-1}}\Big(\begin{bmatrix} h & \\ & 1 \end{bmatrix}\Big)\, \Lambda_{\overline{\psi}}\big(\pi'^{\circ}(h).\xi'^{\circ}\big)\ |\det h|^{s-1/2}\, \mathrm{d}h$$

を考える。但し, $X = q^{-s}$, 積分域は $U_{n-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{n-1}(F)$ である。

Fact 1 ([Ja-PS-Sh-2] lem.3.4)： 一般に $W_1, W_2 \in \mathcal{W}_{\overline{\psi}}(\pi^{\vee})$ に対し, $\mathcal{Z}(X; *, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1})$ が 定数 C 倍を除き一致する時, $H = \{\mathrm{diag}(h,1)\,|\, h \in \mathrm{GL}_{n-1}(F)\}$ 上で $W_1 = C \cdot W_2$ となる。

Proposition 3.13 (essential vector；[Ja-PS-Sh-2] Thm.4.1)**.**
任意の *generic* 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{adm}$ に対し,

(1) $W\Big(g\begin{bmatrix} h & \\ & 1 \end{bmatrix}\Big) = W(g)$ *for* $\forall h \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{O}_F)$ かつ,

(2) $\mathcal{Z}(X; W, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} P_{\pi}(\chi'_i(\varpi)X)^{-1}\Big(\textit{i.e.}\ = \prod_{i=1}^{n-1} L(s; \pi \times \chi'_i)\Big)$

を満たす *Whittaker* 関数 $W \in \mathcal{W}_{\psi}(\pi)$ が, 定数倍を除いて唯一存在する。 □

上 Proposition の Whittaker 関数を W^{ess} と書き, π の essential vector と呼ぶ。

Fact 2 ([Ja-PS-Sh-2] lem.5.2)：W^{ess} は ${}^tH(0)$-不変 (*cf.* Definition 3.1) である。

ここで, 性質 $\mathcal{Z}(UX; W, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1}) = \mathcal{Z}(X; W, \chi'_1 U, \ldots, \chi'_{n-1} U)$ により, 対称関数 $\Xi(W, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1}) \in \mathbb{C}[\chi'^{\pm}_1, \ldots, \chi'^{\pm}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}$ を用いて,

$$\mathcal{Z}(X; W, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1}) \ = \ \Xi(W, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1}) \times \prod_{i=1}^{n-1} P_{\pi}(\chi'_i(\varpi)X)^{-1}$$

と書けることに注意しておく。

Proof of Theorem. 前サブセクションの議論は 任意の n,m, 任意の generic 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{adm}$, $\pi' \in \mathrm{GL}(m)^{\wedge}_{adm}$ に対して成り立つ (*cf.* [石川] §1.2)。特に $m = n-1$ の場合は, 射影 $\mathbb{P}^n$ による修正も不要で, 局所関数等式は

$$\frac{\mathcal{Z}(q^{-1}X^{-1}; W^{\vee}, \chi'^{-1}_1, \ldots, \chi'^{-1}_{n-1})}{\prod_{i=1}^{n-1} L(1-s; \pi^{\vee} \times \chi'^{-1}_i)} \ = \ \Big\{\prod_{i=1}^{n-1} \varepsilon(\chi'_i(\varpi)X; \pi, \psi)\Big\} \times \frac{\mathcal{Z}(X; W, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1})}{\prod_{i=1}^{n-1} L(s; \pi \times \chi'_i)}$$

の形で成り立つ。但し, $\varepsilon(X; \pi, \psi)$ は, 局所 ε-因子を $X = q^{-s}$ の単項式と見做したもの。ここで, W として π の essential vector W^{ess}, ψ として 不分岐加法指標を採ると, Proposition 3.13(2) により, 右辺第二項は 消える。更に, $q^{-1}X^{-1}$ を X, χ'^{-1}_i を χ'_i と置換すると

$$\frac{\mathcal{Z}(X; W^{ess\vee}, \chi'_1, \ldots, \chi'_{n-1})}{\prod_{i=1}^{n-1} L(s; \pi^{\vee} \times \chi'_i)} \ = \ \Big\{\prod_{i=1}^{n-1} \varepsilon(q^{-1}\chi'_i(\varpi)^{-1}X^{-1}; \pi, \psi)\Big\}$$

を得る。$f^{an}(\pi)$ の定義から, $\varepsilon(X;\pi,\psi)=\varepsilon(0)\times X^{f^{an}(\pi)}$ なので,

$$\mathcal{Z}(X;W^{ess\vee},\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1})=\varepsilon(0)^{n-1}\big(q^{-1}X^{-1}\big)^{(n-1)f^{an}}\prod_{i=1}^{n-1}\chi'_i(\varpi)^{-f^{an}}\prod_{i=1}^{n-1}L(s;\pi^\vee\times\chi'_i).$$

一方, 反傾表現 $\pi^\vee$ の essential vector $W'^{ess}\in\mathcal{W}_{\overline{\psi}}(\pi^\vee)$ に対して,

$$\mathcal{Z}(X;W'^{ess},\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1})=\prod_{i=1}^{n-1}L(s;\pi^\vee\times\chi'_i)$$

なので,

$$W'^{ess}_{+f}(*)\ :=\ W'^{ess}\Big(*\begin{bmatrix}\varpi^{f^{an}}&&\\&\ddots&&\\&&\varpi^{f^{an}}&\\&&&1\end{bmatrix}\Big)\ \in\ \mathcal{W}_{\overline{\psi}}(\pi^\vee)$$

と置けば, $\mathcal{Z}(X;W^{ess\vee},\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1})=\exists C\cdot\mathcal{Z}(X;W'^{ess}_{+f},\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1})$ となる。**Fact 1** により, $W^{ess\vee}=C\cdot W'^{ess}_{+f}$ が H 上で成り立つが, Proposition 3.13(1) により, これは $\mathrm{GL}_n(F)$ 全体で成り立つ。これと **Fact 2** から, W'^{ess}_{+f} は $H(f^{an})$-不変, 従って W^{ess} は ${}^tH(f^{an})$-不変である。$f^{an}\geq 0$ [20]なら, $\langle H(0),{}^tH(f^{an})\rangle=K^{mir}_{f^{an}}$ なので, W^{ess} は $K^{mir}_{f^{an}}$-fixed と判った。

今 $j\in\mathbb{Z}_{\geq}$ に対し, K^{mir}_j-不変な Whittaker 関数 $W^{[j]}\in\mathcal{W}_\psi(\pi)$ が在ったとする。$H(0)\subset K^{mir}_j$ なので, $\Xi\big(W^{[j]},\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1}\big)\in\mathbb{C}[{\chi'}^{\pm}_1,\ldots,{\chi'}^{\pm}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}$ に負冪項は現れず, $\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1}$ の多項式 P になる。また, ${}^tH(j)\subset K^{mir}_j$ なので, $W^{[j]}$ は $H(j)$-不変と判る。

$$W^{[j]\vee}_{-j}(*)\ :=\ W^{[j]\vee}\Big(*\begin{bmatrix}\varpi^{-j}&&\\&\ddots&&\\&&\varpi^{-j}&\\&&&1\end{bmatrix}\Big)\ \in\ \mathcal{W}_\psi(\pi^\vee)$$

は $H(0)$-不変なので, $\Xi\big(W^{[j]\vee}_{-j},\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1}\big)$ も $\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1}$ の多項式になる。従って, $\Xi\big(W^{[j]\vee},\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1}\big)=\frac{Q(\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1})}{(\chi'_1\cdots\chi'_{n-1})^j}$ となる P の定数倍の多項式 Q が在る。一般に,

$$\Xi(W^\vee,q^{-1}\chi'^{-1}_1,\ldots,q^{-1}\chi'^{-1}_{n-1})\ =\ \Big\{\prod_{i=1}^{n-1}\varepsilon\big(\chi'_i(\varpi);\pi,\psi\big)\Big\}\times\Xi(W,\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1})$$

が成り立つ ([Ja-PS-Sh-2] §4.2 (7))。W として $W^{[j]}$ を採れば,

$$\frac{Q(q^{-1}{\chi'}^{-1}_1,\ldots,q^{-1}{\chi'}^{-1}_{n-1})}{(q^{-1}{\chi'}^{-1}_1\times\cdots\times q^{-1}{\chi'}^{-1}_{n-1})^j}\ =\ \Big\{\prod_{i=1}^{n-1}\varepsilon(0)\chi'_i(\varpi)^{f^{an}}\Big\}\times P(\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1})$$

を得る。即ち, $\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1}$ の多項式としての等号

$$Q(q^{-1}{\chi'}^{-1}_1,\ldots,q^{-1}{\chi'}^{-1}_{n-1})=\varepsilon(0)^{n-1}q^{-j(n-1)}\big(\chi'_1\cdots\chi'_{n-1}(\varpi)\big)^{f^{an}-j}\times P(\chi'_1,\ldots,\chi'_{n-1})$$

[20] もし $f^{an}<0$ だと, $\langle H(0),{}^tH(f^{an})\rangle=\mathrm{GL}_n(F)$ なので, $W^{ess}=$(const) となり矛盾。

が成り立つので, $j \geq f^{an}$ でなくてはならない。

更に, $j = f^{an}$ なら, 上等式から P は定数である。従って, essential vector の唯一性 (Proposition 3.13) から $W^{[j]} = \exists C \times W^{ess}$ となり, 同型 $V_\pi \cong \mathcal{W}_\psi(\pi)$ より Proposition 3.3 も示された。 □

§ 4. Hereditary order conductors

ここでは, π が 特殊な Hereditary order から定まるコンパクト群の "良い"表現を含む時, Godement-Jacquet 積分により定まる局所 ε-因子[21]が, その表現の不変量を用いて表示できることを見る。この第四節は, Bushnell 達の"type 理論"の雛形であり, 主結果 (§4.4) は supercuspidal $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{sc}$ に対してのみ述べる。より大きいクラスに属する π については, Theorems 5.10, 5.14 により, supercuspidal の場合に帰着される。

§ 4.1. Hereditary/Principal orders

以下, F 上の分裂 n^2-algebra を A とする, 即ち $A := \mathrm{M}_n(F)$ とおく[22]。

Definition 4.1. A の $\mathcal{O}_F$-order $\mathcal{A}$ が hereditary であるとは, 任意の有限生成 A-加群 M に対して, M に含まれる 全ての $\mathcal{A}$-lattice が $\mathcal{A}$-射影的になることである。ここで, $\mathcal{A}$-lattice とは, $\mathcal{A}$-加群で $\mathcal{O}_F$-lattice になるものの意である。 ■

Fact： A の hereditary order $\mathcal{A}$ と F^n 内の lattice chain $\{L_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ は, index のずらしを除いて, 一対一に対応する。但し, $\mathcal{O}_F$-lattice $L_i \subset F^n$ $(i \in \mathbb{Z})$ 達が, period e の lattice chain を成すとは, (1) $L_i \subset L_{i+1}$ for $\forall i$, かつ (2) $L_{i+e} = \mathcal{P}_F L_i$ for $\forall i$ なる $e \in \mathbb{N}$ が存在することである。

記号： $e_\mathcal{A} :=$ ($\mathcal{A}$ に対応する lattice chain $\{L_i(\mathcal{A})\}_{i\in\mathbb{Z}}$ の period),
$\mathcal{P}_\mathcal{A} :=$ ($\mathcal{A}$ の Jacobson 根基 $Jac(\mathcal{A})$)

$\dim_{\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F} L_i(\mathcal{A})/L_{i+1}(\mathcal{A})$ を並べると, $n_1, \ldots, n_e$ の繰り返しを得る。$(n_1, \ldots, n_e)$ は, n の分割になっているので, $A^\times$ による conjugation を除いて, hereditary order $\mathcal{A}$ と その Jacobson 根基 $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ は, 対角ブロックが $n_i \times n_i$ サイズの行列集合として,

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{O}_F & \multicolumn{3}{c}{\mathcal{P}_F} \\ \hline & \mathcal{O}_F & & \\ \cline{2-4} \multicolumn{2}{c|}{\mathcal{O}_F} & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathcal{O}_F} \end{array}\right], \quad \mathcal{P}_\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{P}_F & \multicolumn{3}{c}{\mathcal{P}_F} \\ \hline & \mathcal{P}_F & & \\ \cline{2-4} \multicolumn{2}{c|}{\mathcal{O}_F} & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathcal{P}_F} \end{array}\right]$$

の様に表示できる。

[21] これは, Jacquet-PiatetskiShapiro-Shalika 積分から定まる $\varepsilon(s; \pi \times 1, \psi)$ と一致する (*cf.* §4.3)。
[22] [Bu-Fr] では, A は F 上の分裂とは限らない 任意の n^2-algebra としている。即ち, $A := \mathrm{M}_m(D)$, D は F 上の d^2-division algebra で, $n = md$ なるもの としている。

Definition 4.2. A の hereditary order $\mathcal{A}$ が principal であるとは, その Jacobson 根基 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ が, 左[23]$\mathcal{A}$-主イデアルになる ことである。 ■

Fact： $\mathcal{A}$ が principal order $\iff n_1 = n_2 = \cdots = n_e (= n/e_{\mathcal{A}})$：等分割
記号：$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \mathcal{D}_F {\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}^{e_{\mathcal{A}}-1}$：principal order $\mathcal{A}$ の 絶対 different と呼ぶ。但し, $\mathcal{D}_F =: \mathcal{P}_F^{d_F}$ は F の different。

§4.2. cpt-mod-ctr 部分群 $K_{\mathcal{A}}$ と その表現

以下, $A = \mathrm{M}_n(F)$ の乗法群 $A^\times = \mathrm{GL}_n(F)$ を G と書く。
A の principal order $\mathcal{A}$ の filtration

$$A \supset \mathcal{A} \supset \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \supset {\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}^2 \supset \cdots$$

から, G の filtration

$$G \supset \mathcal{A}^\times \supset U^1(\mathcal{A}) \supset U^2(\mathcal{A}) \supset \cdots$$

が, $U^j(\mathcal{A}) := I_n + {\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}^j$ と置くことで定まる。また, $U^0(\mathcal{A}) := \mathcal{A}^\times$ と定める。今 $\mathcal{A}$ は principal なので, $U^0(\mathcal{A})$ は $P_{(n/e,\ldots,n/e)}$ に付随する[24]parahoric 部分群になっている。

$$\begin{aligned} U^0(\mathcal{A})/U^1(\mathcal{A}) &\cong \prod_{i=1}^{e_{\mathcal{A}}} \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(L_{i-1}/L_i) \cong \mathrm{GL}_{n/e_{\mathcal{A}}}(\mathbb{F}_q)^{e_{\mathcal{A}}}, \\ U^j(\mathcal{A})/U^{j+1}(\mathcal{A}) &\cong {\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}^j/{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}^{j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

であることに注意すると,

Proposition 4.3. $j \geq 1$ なる時, $U^j(\mathcal{A})/U^{j+1}(\mathcal{A})$ の任意の指標 χ に対し, $\chi(I_n + x) =: \psi_A(\alpha_\chi \cdot x)$ と置くと,

$$\begin{array}{ccc} \left(U^j(\mathcal{A})/U^{j+1}(\mathcal{A})\right)^\wedge & \cong & c(\psi_{\mathcal{A}})\mathcal{P}_F^{-j-1}/c(\psi_{\mathcal{A}})\mathcal{P}_F^{-j} \\ \chi & \mapsto & \alpha_\chi + c(\psi_{\mathcal{A}})\mathcal{P}_F^{-j} \end{array}$$

は, 可換群としての同型を与える。 □

但し, $\psi_{\mathcal{A}} := \psi_F^{IT} \cdot \mathrm{tr}_{A/F}$, $\psi_F^{IT} :=$(岩澤-Tate の標準指標), $c(\psi_{\mathcal{A}}) := \mathcal{D}_F^{-1}$ とした。
記号： $\delta_\chi := \alpha_\chi + c(\psi_{\mathcal{A}})\mathcal{P}_F^{-j}$ を χ の dual blob と呼ぶ。

G の filtration で, 先頭 G と $U^0(\mathcal{A})$ に挟まるものとして, $K_{\mathcal{A}} := \left\{g \in G \mid g^{-1}\mathcal{A}g = \mathcal{A}\right\}$ とおくと, これは G の中心を modulo としてコンパクトな（cpt-mod-ctr と略記する）部分群になる。

Fact：A の principal order $\mathcal{A}$ と G の cpt-mod-ctr 部分群 $K_{\mathcal{A}}$ は, 一対一に対応する。

[23]右-イデアルにもなるので, 両側-イデアルとしても良い。
[24]$e = n$ なら, $U^0(\mathcal{A})$ は 岩堀部分群 J に他ならない。

Definition 4.4. $K_{\mathcal{A}}$ の任意の既約表現 $\sigma \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge}$ に対し,

$$f(\sigma) \ := \ \min\left\{ j \in \mathbb{Z} \mid j \geq 0,\, U^j(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Ker}\,\sigma \right\}$$

と置き, $\mathcal{F}(\sigma) := \mathcal{P}_{\mathcal{A}}{}^{f(\sigma)}$ を σ の conductor と呼ぶ。 ■

Note: $f(\sigma) \geq 2$ の時, その決め方から, $\sigma|_{U^{f(\sigma)-1}(\mathcal{A})}$ は 有限 abel 群 $U^{f(\sigma)-1}(\mathcal{A})/U^{f(\sigma)}(\mathcal{A})$ の表現と見做せるので,

$$\sigma\big|_{U^{f-1}(\mathcal{A})} \ \cong \ \bigoplus_{\chi \in (U^{f-1}(\mathcal{A})/U^f(\mathcal{A}))^{\wedge}} [\sigma : \chi]\, \chi \tag{4.2.1}$$

と 指標 χ 達の直和に分解する。但し, $[\sigma : \chi]$ は χ の σ に於ける重複度, f は $f(\sigma)$ の略記。

Definition 4.5. 次のいずれかの条件を満たす時, $K_{\mathcal{A}}$ の既約表現 $\sigma \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge}$ は 非退化 であるという。
(*i*) $f(\sigma) = 0$ or 1,
(*ii*) $f(\sigma) \geq 2$ で, $K_{\mathcal{A}} \cap \delta_{\chi} \neq \emptyset$ なる χ が, (4.2.1) に現れる。 ■

非退化な $\sigma \in K_{\mathcal{A}}{}^{\wedge}$ は, 以下の様に σ の不変量 $\tau(\sigma)$ で特徴付けられる。

Proposition 4.6 (非退化表現 σ の特徴付け ; [Bu-Fr] Thm.2.3.8)**.**
任意の $\sigma \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge}$ に対し,

$$\sigma \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge} \text{ が 非退化である} \iff \tau(\sigma) \neq 0$$

が成り立つ。 □

但し, $\tau(\sigma)$ は 次の様に与えられる ;

Definition 4.7. $\sigma \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge}$ の conductor と $\mathcal{A}$ の絶対 different の積イデアルを生成する元を $c \in K_{\mathcal{A}}$ とする ; $c\mathcal{A} := \mathcal{D}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}(\sigma)$。この時, V_{σ} 上の operator

$$\sum_{x \in U^0(\mathcal{A})/I_n + \mathcal{F}(\sigma)} \psi_A(c^{-1}x) \cdot \sigma(c^{-1}x)$$

の唯一の固有値を $\tau(\sigma)$ と書き, σ の 非可換合同 Gauss 和 と呼ぶ。 ■

§ 4.3. 分岐 L-因子 と 局所関数等式

既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)_{adm}^{\wedge}$ に対し, その $(\xi, \xi^{\vee})$ に関する行列要素 $c_{\xi,\xi^{\vee}}(g) = \, < \pi(g)\xi, \xi^{\vee} >$ (*cf.* §2,3) と テスト関数 $\Phi \in \mathcal{S}(A)$ から定まる 局所積分

$$\mathcal{Z}(s;\, \xi, \xi^{\vee}, \Phi) \ := \ \int_G c_{\xi,\xi^{\vee}}(g)\Phi(g)|\det g|^s \mathrm{d}g$$

(*cf.* Proposition 2.14 の直前) は $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で絶対収束し, 全 s-平面に解析接続される。更に, q^{-s} の Laurent 多項式となる, 即ち

$$\mathcal{Z}(s;\, \xi, \xi^{\vee}, \Phi) \ \in\ \mathbb{C}[q^{s}, q^{-s}]$$

となる ([Go-Ja] Thm.3.3, Prop.5.11) ことまで判る。π から定まる, q^{-s} の分数関数の族を

$$ZI^{GoJa}(\pi) \ :=\ \left\{ \mathcal{Z}(s + \frac{n-1}{2};\, \xi, \xi^{\vee}, \Phi) \,\middle|\, \forall\Phi \in \mathcal{S}(A),\ \forall\xi^{\vee} \in V_{\pi}^{\vee},\ \forall\xi \in V_{\pi} \right\}$$

と書く。これから, π に付随する 局所 L-/ε-因子[25]が, 次の様に定義される。

Proposition 4.8 ([Go-Ja] Thm.3.3)**.**
G の任意の許容表現 π に対して, 次が成り立つ。

(1) 定数項 1 の多項式 $P_{\pi}(X) \in \mathbb{C}[X]$ で,

$$P_{\pi}(q^{-s}) \times \mathcal{Z}(s + \frac{n-1}{2};\, \xi, \xi^{\vee}, \Phi) \ :s \text{ の正則関数} \quad \textit{for } \forall\mathcal{Z} \in ZI^{GoJa}(\pi)$$

を満たし, 次数最小のものが 唯一存在する。

(2) 上の多項式を使い, 局所 L-因子 を $L(s;\pi) := 1/P_{\pi}(q^{-s})$ と定義すると,

$$\frac{\mathcal{Z}(1-s+\frac{n-1}{2};\, \xi^{\vee}, \xi, \widehat{\Phi})}{L(1-s;\pi^{\vee})} \ =\ \varepsilon(s;\pi,\psi) \times \frac{\mathcal{Z}(s+\frac{n-1}{2};\, \xi, \xi^{\vee}, \Phi)}{L(s;\pi)} \tag{4.3.1}$$

を満たす $\varepsilon(s;\pi,\psi) \in \mathbb{C}[q^{s}, q^{-s}]$ が, 唯一存在する。 □

上の関数等式を 二回使うと, $\widehat{\widehat{\Phi}}(X) = \Phi(-X)$ なので, $\varepsilon(s;\pi,\psi)$ は $\mathbb{C}[q^{s}, q^{-s}]$ の単数即ち q^{-s} の単項式であることが判るので,

$$\varepsilon(s;\pi,\psi) \ =\ c_{\pi} \times \left(q^{-s}\right)^{f^{an}(\pi,\psi)}, \tag{4.3.2}$$

$c_{\pi} \in \mathbb{C}^{\times}$, $f^{an}(\pi,\psi) \in \mathbb{Z}$ と書ける。実は, $f^{an}(\pi,\psi) \geq 0$ まで判る。

§ 4.4. supercuspidal 表現の 最小 $K_{\mathcal{A}}$-タイプ と ε-因子

前サブセクションで定義された 局所 ε-因子 と 既約許容表現 π の $K_{\mathcal{A}}$-タイプ の間には, 次の様な関係がある。

Theorem 4.9 ([Bu-Fr] Thm.3.3.8)**.**
supercuspidal 表現 π に対し, *principal order* $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(F)$ と *cpt-mod-ctr* 部分群 $K_{\mathcal{A}}$ の非退化既約表現 $\sigma \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge}$ で π に現れるもの (*i.e.* $[\pi:\sigma] \geq 1$) が在ると仮定する。

[25] 前セクション 第三節では, 別の積分の族 $ZI^{JPSS}(\pi)$ を用いて L-/ε-因子を定義した。π が generic である限り, これら二つの定義は 同じ L-/ε-因子を与える (*cf.* [Jac-1])。

(1) 任意の $\sigma' \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge}$ に対し,

$$[\pi : \sigma'] \geq 1 \implies \mathcal{F}(\sigma) \,|\, \mathcal{F}(\sigma')$$

更に, 「$\mathcal{F}(\sigma) = \mathcal{F}(\sigma') \iff \sigma'$ も非退化」が成り立つ。この時, $\tau(\sigma) = \tau(\sigma')$ である。

(2) 局所 ε-因子 $\varepsilon(s; \pi, \psi_F^{IT})$ は, π に現れる非退化な $\sigma \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge}$ を用いて,

$$\varepsilon(s; \pi, \psi_F^{IT}) \;=\; W(\sigma) \times Q(F, \sigma)^{(\frac{1}{2}-s)},$$

$$W(\sigma) \;:=\; \frac{\tau(\sigma^\vee)}{\{N_{\mathcal{A}}\big(\mathcal{F}(\sigma)\big)\}^{1/2}}, \qquad Q(F, \sigma) \;:=\; N_{\mathcal{A}}\big(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}(\sigma)\big)^{1/n}$$

と 表わされる。但し, $\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{I}$ に対し, $N_{\mathcal{A}}\mathcal{I} := [\mathcal{A} : \mathcal{I}]$ とする。 □

上 Theorem (2) の ε-因子の表示から, $f^{an}(\pi)$ の π の内在的な不変量による解釈が 次の様に[26]得られる。

Corollary 4.10. 前 *Theorem* の条件を満たす $\mathrm{GL}_n(F)$ の *supercuspidal* 表現 π に対し,

$$f^{an}(\pi, \psi_F^{IT}) \;=\; \frac{n}{e_{\mathcal{A}}}\big(f(\sigma)-1\big)+n+nd_F. \qquad \square$$

Proof. (4.3.2) と Theorem (2) から, $c_\pi(q^{-s})^{f^{an}(\pi, \psi_F^{IT})} = W(\sigma)Q(F, \sigma)^{(\frac{1}{2}-s)}$ 例えば $s = -2$, $s = -1$ として両辺割れば, $q^{nf^{an}(\pi, \psi_F^{IT})} = N_{\mathcal{A}}\big(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}(\sigma)\big)$ を得る。ここで, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_F^{d_F}\mathcal{P}_{\mathcal{A}}{}^{e_{\mathcal{A}}-1}$, $\mathcal{F}(\sigma) = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}{}^{f(\sigma)}$ また, $N_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}) = q^{n^2/e_{\mathcal{A}}}$, $N_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_F\mathcal{A}) = q^{n^2}$ なので,

$$N_{\mathcal{A}}\big(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}(\sigma)\big) = \big(q^{n^2/e_{\mathcal{A}}}\big)^{e_{\mathcal{A}}+f(\sigma)-1} \times \big(q^{n^2}\big)^{d_F}$$

と判り, q の冪指数を比べることで Corollary を得る。 □

Proof of Theorem [27]. $\Phi \in \mathcal{S}(A)$ に対し, V_π 上の作用素に値をとる $s \in \mathbb{C}$ の関数を

$$Z(s; \pi, \Phi) \;:=\; \int_G \Phi(g)\,|\det g|^s\,\pi(g)\,\mathrm{d}g$$

で定めると, $< Z(s; \Phi, \pi).\xi, \xi^\vee >= \mathcal{Z}(s;\, \xi, \xi^\vee, \Phi)$ for $\forall \xi \in V_\pi$, $\forall \xi^\vee \in V_\pi^\vee$ が成り立つ (*cf.* [Go-Ja] p.34-p.35)。局所関数等式 (4.3.1) と π の L-因子自明性 (Theorem 5.5) より,

$$\text{(4.4.1)} \qquad {}^tZ(1-s+\frac{n-1}{2}; \pi^\vee, \widehat{\Phi}) \;=\; \varepsilon(s; \pi, \psi_F^{IT}) \times Z(s+\frac{n-1}{2}; \pi, \Phi)$$

[26]Corollary 中の nd_F は, 岩澤-Tate の標準指標 ψ_F^{IT} の conductor から来るパートで, 不分岐指標 ψ° に採り替えると 0 である。また, supercuspidal π に現れる非退化 σ は, 必ず分岐 (*i.e.* $f(\sigma) \geq 1$) する ([Bu-Fr] Thm.3.3.2) ので, $f^{an}(\pi, \psi^\circ) \geq n$ が成り立つ。また, 任意の $\pi \in \mathrm{GL}(n)_{sc}^{\wedge}$ に対し, period が $e_{\mathcal{A}} = \frac{n}{GCD(n, f^{an}(\pi))}$ なる principal order $\mathcal{A}$ を採ると, $\pi|_\sigma$ は 非退化な $\sigma \in K_{\mathcal{A}}^{\wedge}$ を含む ([Bus-1] Thm.3)。

[27][Bus-2] には, 後に得られた Kutzko の結果を使った もっと直接的な証明がある。

を得る。この両辺を計算することで, $\varepsilon(s;\pi,\psi_F^{IT})$ を求める。π の $K_{\mathcal{A}}$-type σ_i $(i\in\mathbb{N})$ を,

$$\mathcal{F}(\sigma_1)\mid\mathcal{F}(\sigma_2)\mid\ \cdots\ \mid\mathcal{F}(\sigma)\mid\mathcal{F}(\sigma_{r+1})\mid\ \cdots$$

なる様に並べる。仮定にある非退化 σ は, r 番目の σ_r としている。V_{σ_i} の basis を固定して, それらを $i=1,2,\dots$ の順に並べた V_π の base を $\mathcal{B}$ とする。$v\in\mathcal{B}$ に対し, $<v,v^\vee>=1$ で $V_\pi^\vee$ の base $\mathcal{B}^\vee$ を定める。この basis に関して, $(v,v^\vee)$-成分が $\mathcal{Z}(s;\,v,v^\vee,\Phi)$ となる 作用素を $Z^{\mathcal{B}}(s;\pi,\Phi)$ を考える。

先ず, (4.4.1) の右辺を見る。$\pi(g)=\mathrm{diag}\big(\sigma_1(g),\dots,\sigma(g),\sigma_{r+1}(g),\dots\big)$ に注意して, test 関数 Φ として $I_n+\mathcal{F}(\sigma)$ の特性関数 $\mathrm{ch}_{U^{f(\sigma)}(\mathcal{A})}$ を採ると

$$Z^{\mathcal{B}}(s;\pi,\mathrm{ch}_{U^f}) \;=\; \int_{U^f}|\det g|^s\,\pi(g)\,\mathrm{d}g \;=\; \mathrm{vol}\big(U^f\big)\begin{bmatrix} 1_{V_{\sigma_1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{1_{V_\sigma}} & & \\ & & & \boxed{0} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.4.2}$$

と書ける。但し, $U^{f(\sigma)}(\mathcal{A})$ を U^f と略記した。

次に, (4.4.1) の左辺を計算する。$\Psi:=\mathrm{ch}_{\mathcal{F}(\sigma)}$ と書く。$\Psi(x-I_n)=\mathrm{ch}_{U^f}(x)$ に注意すると $\widehat{\mathrm{ch}_{U^f}}(y)=\psi_{\mathcal{A}}(y)\times\widehat{\Psi}(y)$ である。ここで,

$$\widehat{\Psi}(y) \;=\; \int_G \Psi(x)\psi_{\mathcal{A}}(xy)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} \Big\{\sqrt{N_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})}N_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\sigma))\Big\}^{-1} & y\in\big(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}(\sigma)\big)^{-1},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

なので, $c\mathcal{A}=\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}(\sigma)$ なる $c\in K_{\mathcal{A}}$ を採ると,

$$\widehat{\mathrm{ch}_{U^f}}(y)=\psi_{\mathcal{A}}(y)\Big\{\sqrt{N_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})}N_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\sigma))\Big\}^{-1}\mathrm{ch}_{\mathcal{A}}(cy)$$

と書ける。従って

$$\begin{aligned}
Z^{\mathcal{B}}(s;\pi^\vee,\widehat{\mathrm{ch}_{U^f}}) &= \int_{A^\times}\widehat{\mathrm{ch}_{U^f}}(x)|\det x|^s\,\pi^\vee(x)\,\mathrm{d}^\times x\\
&= \frac{1}{\sqrt{N_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})}N_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\sigma))}\int_{A^\times}\psi_{\mathcal{A}}(x)\mathrm{ch}_{\mathcal{A}}(cx)|\det x|^s\,\pi^\vee(x)\,\mathrm{d}^\times x\\
&= \frac{|\det c|^{-s}}{\sqrt{N_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})}N_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\sigma))}\int_{A^\times\cap\mathcal{A}}\psi_{\mathcal{A}}(c^{-1}x)|\det x|^s\,\pi^\vee(c^{-1}x)\,\mathrm{d}^\times x\\
&= \frac{|\det c|^{-s}}{\sqrt{N_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})}N_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\sigma))}\sum_{j=0}^{\infty}\big(q^{-j}\big)^s\int_{x\in\mathcal{A},|\det x|=q^{-j}}\psi_{\mathcal{A}}(c^{-1}x)\pi^\vee(c^{-1}x)\,\mathrm{d}^\times x
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{|\det c|^{-s}}{\sqrt{N_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})}N_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\sigma))}\int_{x\in\mathcal{A},|\det x|=q^{-j}}\psi_{\mathcal{A}}(c^{-1}x)\pi^\vee(c^{-1}x)\,\mathrm{d}^\times x\right)\big(q^{-s}\big)^j \tag{4.4.3}$$

と分かる。上 ( ) 内の作用素で, s を $1-s+\frac{n-1}{2}$ に置き換えた物を $C_j(\pi^\vee)$ と書く。

以上 (4.3.2), (4.4.2), (4.4.3) により, (4.4.1) は

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j(\pi^\vee)\times\left(q^{-s}\right)^j \;=\; c_\pi \times \left(q^{-s}\right)^{f^{an}(\pi,\psi_F^{IT})} \times \mathrm{vol}\left(U^f\right) \begin{bmatrix} 1_{V_{\sigma_1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1_{V_\sigma} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.4.4}$$

となる。今 $f^{an}(\pi,\psi_F^{IT})$ は 或る決まった自然数なので, 上等式より一つの j を除いて $C_j(\pi^\vee)$ は消える。

ところが, $j=0$ の場合を見てみてると $C_0(\pi^\vee)\neq 0$ と判る。実際, $j=0$ の時 $C_j(\pi^\vee)$ の積分域は $U^0(\mathcal{A})$ であり, $x\in U^0(\mathcal{A})$ なら $\pi^\vee(c^{-1}x) = \mathrm{diag}\left(\sigma_1^\vee(c^{-1}x), \sigma_2^\vee(c^{-1}x), \dots\right)$ となっている。また, $U^0/U^f = \mathcal{A}^\times/\left(I_n+\mathcal{F}(\sigma)\right)$ 上では, $\psi_{\mathcal{A}}(c^{-1}x)\,\pi^\vee(c^{-1}x)$ は 一定なので, 作用素 $C_0(\pi^\vee)$ の r-番目の (即ち σ-isotypic) ブロックは,

$$\frac{|\det c|^{-(\frac{1}{2}-s+\frac{n}{2})}}{\sqrt{N_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})}N_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(\sigma))}\mathrm{vol}\left(U^f\right)\times\tau\left(\sigma^\vee\right)\times 1_{V_\sigma}$$

と判る。これは, σ に関する仮定 と Proposition 4.6 により, 消えていない。

後は, c の決め方から $|\det c| = N_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}(\sigma)\right)^{-1/n}$ に注意して, (4.4.4) の両辺 σ-ブロックを比較すれば, Theorem (2) を得る。(1) は, 上の議論より従う。 □

§ 5. Appendix：$\mathrm{GL}_n(F)$ の許容表現の分類 と L-/ε-因子

この Appendix では, p-進体 F 上の一般線形群 $\mathrm{GL}_n(F)$ の許容表現に対し, その Bernstein-Zelevinsky 分類 と 各クラスに属する表現の L-/ε-因子について 纏めておく。$\mathcal{O}_F$, π などの記号は, §3 冒頭の約束の通りとする。

§ 5.1. Praboric induction と supercuspidal 表現

Definition 5.1. $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現 (π, V_π) が 許容表現 であるとは, smooth (i.e. $\forall\xi\in V_\pi$ に対し, $\mathrm{Stb}(\xi)\subset\mathrm{GL}_n(F)$ が open) かつ, 任意の開コンパクト部分群 $K\subset\mathrm{GL}_n(F)$ に対して, その固定部分空間 V_π^K が 有限次元になることである。その同値類の成す集合を

$$\mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm} \;:=\; \{\mathrm{GL}_n(F) \text{ の許容表現 } (\pi, V_\pi)\}/\sim$$

と書く。 ■

分割 $\underline{n} = (n_1,\dots,n_r)\vdash n$ に対して, それに付随する 放物部分群 を

$$P_{\underline{n}} \;:=\; \begin{bmatrix} \mathrm{GL}(n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{GL}(n_r) \end{bmatrix} . \left\{ \begin{bmatrix} I_{n_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & I_{n_r} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n) \right\} \;=:\; M_{\underline{n}}.N_{\underline{n}}$$

とする。特に, $\underline{n} = (1,\dots,1)$ の時, $P_{(1,\dots,1)} = M_{(1,\dots,1)}.N_{(1,\dots,1)}$ を $B_n = T_n.U_n$ と書き, $\mathrm{GL}(n)$ の 標準 Borel 部分群 という。また, $M_{(n-1,1)}$ で $\mathrm{GL}(1)$-ブロックを $\{1\}$ に制限した $P_{(n-1,1)}$ の部分群 P_{mir} を ミラボリック部分群（P_{mir} は, 放物部分群ではない）という。

$M_{\underline{n}}$ の各ブロック $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の許容表現 $(\sigma_i, V_i) \in \mathrm{GL}(n_i)^\wedge_{adm}$ 達からの 放物誘導[28]を

$$I_P^G(\sigma_1,\dots,\sigma_r) \;:=\; \mathrm{Ind}_{P_{\underline{n}}(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \delta_{\underline{n}}^{1/2}(\sigma_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma_r) \otimes 1_{N_{\underline{n}}(F)}$$

と略記する。但し, $\delta_{\underline{n}}(m) \;:=\; \left|\det(\mathrm{Ad}(m)|_{\mathrm{Lie}N_{\underline{n}}(F)})\right|_F$, for $m \in M_{\underline{n}}(F)$ は, $P_{\underline{n}}$ の modulus character [29]である。

先ず 問題になるのは, ”この誘導表現が いつ可約なのか?”ということであるが, $s \in \mathbb{C}$ と $\sigma \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ に対して, $\sigma(s) := \sigma \otimes |\cdot|^s : g \mapsto |\det g|^s \sigma(g)$ とすると,

Theorem 5.2 (可約性の判定)**.**

$$I_P^G(\sigma_1,\dots,\sigma_r) \text{ が 可約} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} n_i = n_j, \\ \sigma_i \cong \sigma_j(1) \end{cases} \text{なる } i, j \text{ がある}$$

□

可約な誘導表現 $I_P^G(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ のジョルダン-ヘルダー成分として, $\mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ の元が沢山 つくられるわけであるが,

Definition 5.3. 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ が supercuspidal であるとは, いかなる放物誘導 $I_P^G(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ $(r \geq 2)$ の 部分商にも π は 同型でないことである。この条件は, 任意の放物真部分集合 $P = MN$ に対し, π の Jacquet 加群 $V_N := V_\pi/\{\pi(n).\xi - \xi \mid n \in N, \xi \in V_\pi\}$ が $\{0\}$ であることと同値である。この表現の同値類の成す集合を

$$\mathrm{GL}(n)^\wedge_{sc} \;:=\; \{\mathrm{GL}_n(F) \text{ の supercuspidal 表現 } (\pi, V_\pi)\}/\sim$$

と書く。 ■

Note：「$\sigma \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{sc}$ なら, $\sigma(s) \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{sc}$ である」ことに注意せよ。

次の定理は, 許容表現達からの放物誘導は 性質が良い：「$\mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ は, 放物誘導で閉じている」と主張している。

Theorem 5.4 ([Be-Ze-1], [Be-Ze-2])**.**
(1) $\mathrm{GL}(n_i)$ の既約表現 σ_i $(i = 1,\dots,r)$ が長さ有限 (従って 許容表現) なら, $I_P^G(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ も 長さ有限である。
(2) 任意の 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ に対し, $(n_1,\dots,n_r) \vdash n$, $\sigma_i \in \mathrm{GL}(n_i)^\wedge_{sc}$ が 唯一組 定まり, π は $I_P^G(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ の 或る部分商に同型になる。 □

[28]一般に, Lie 群 G の閉部分群 H とその複素 smooth 表現 (σ, V_σ) が与えられた時, G の smooth 表現 $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ を作ることが出来る。その実現は 色々あるが, $C_\sigma^\infty(H\backslash G) := \{f : G \to V_\sigma \mid f(hg) = \sigma(h).f(g), \forall h \in H, \forall g \in G\}$ に, G の右移動による作用を考えものを σ からの誘導表現$\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ の induced picture という。

[29]Borel 部分群 $B_n = P_{(1,\dots,1)}$ の場合：$\delta_{B_n}(\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n)) \;=\; |t_1|_F^{n-1}|t_2|_F^{n-3}\cdots|t_n|_F^{1-n}$

注意：既約許容表現 π は, 色々な 放物誘導 $I_P^G(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ に 埋め込める訳では ない！
言葉：上の Theorem (2) に現れる $(\sigma_1,\dots,\sigma_r) \in \mathrm{GL}(n_1)^{\wedge}_{sc} \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_r)^{\wedge}_{sc}$ を許容表現 π の *supercuspidal support* と呼ぶ。 ■

Theorem 5.5 (L-因子の自明性；[Go-Ja] Prop.5.11)**.**
$n \geq 2$ なら, *supercuspidal* 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{sc}$ の[30] L-因子は自明：$L\big(s\,;\pi\big) = 1$ となる。 □

§ 5.2. supercuspidals から discrete series へ

Definition 5.6. 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{adm}$ が essentially square integrable であるとは, π の 任意の行列要素 $c_{\xi,\xi^\vee}$ (即ち, $\xi \in V_\pi$, $\xi^\vee \in V_\pi^\vee$ に 対して決まる $\mathrm{GL}_n(F)$ 上の関数 $c_{\xi,\xi^\vee}(g) := \langle \pi(g)\xi, \xi^\vee \rangle$) に対して $\int_{Z(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} |c_{\xi,\xi^\vee}(g)|^2 \chi(\det g) \mathrm{d}g$ が 有限値となる 指標 $\chi : F^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ が存在することである。特に, $\chi = 1_{F^\times}$ と採れる時, π は, discrete series であると言う。これらの同値類の成す集合を

$$\mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{eds} := \{\mathrm{GL}_n(F) \text{ の essentially square integrable 表現 } (\pi, V_\pi)\}/\sim$$
$$\mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{ds} := \{\mathrm{GL}_n(F) \text{ の discrete series 表現 } (\pi, V_\pi)\}/\sim$$

と書く。 ■

Note：「任意の supercuspidal 表現の行列要素は, mod.$Z(F)$ で compact support」なので, supercuspidal 表現は essentially square integrable である：$\mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{sc} \subset \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{eds}$

以下, **非常に特殊な** 可約誘導表現を考える。

Definition 5.7. $r \in \mathbb{N}$ と $\sigma \in \mathrm{GL}(m)^{\wedge}_{sc}$ に対して,

$$\Delta(\sigma, r) \ := \ [\sigma, \sigma(1), \dots, \sigma(r-1)]$$

を 長さ r, 次数 rm の segment と言う。この segment Δ からの放物誘導を

$$I_P^G(\Delta) \ := \ \mathrm{Ind}_{P_{(m,\dots,m)}(F)}^{\mathrm{GL}_{rm}(F)} \delta_P^{1/2}\big(\sigma \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma(r-1)\big) \otimes 1_{N_{(m,\dots,m)}(F)} \ \in \ \mathrm{GL}(rm)^{\wedge}_{adm}$$

と 略記する。 ■

上の可約性判定定理 (Theorem 5.2) より, $I_P^G(\Delta)$ は 可約であるが,

Theorem 5.8 (Bernstein-Zelevinsky 分類 [Zel])**.**
(1) $I_P^G(\Delta)$ は, 長さ 2^{r-1} を 持つ。
(2) $I_P^G(\Delta)$ は, そのジョルダン-ヘルダー列の中に, 既約商 $Q(\Delta)$ と 既約部分表現 $Z(\Delta)$ を各々 唯一つ ずつ含んでいる。 □

[30] この Theorem の statement は, $\mathrm{GL}_n(F)$ の任意の inner form $\mathrm{GL}_m(D)$ (D は F 上の division algebra) に対して成り立つ。

ここで 重要なことは, 「この唯一の既約商 $Q(\Delta)$ たちが, 全ての discrete series を覆い尽くす」という 次の事実である。

Proposition 5.9 (Bernstein)**.**
(1) $Q(\Delta)$ は, 必ず *essentially square integrable* 表現である。更に,
segment の 中央メンバー $\sigma(\frac{r-1}{2})$ が *unitary* なら, $Q(\Delta)$ は *discrete series* 表現になる。
(2) 逆に, 任意の *discrete series* 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{ds}$ に対し, *segment* Δ が 唯一つ 定まり (*i.e.* $\exists! rm = n$, $\exists! \sigma \in \mathrm{GL}(m)^\wedge_{sc}$), π は $I_P^G(\Delta)$ の 既約部分商 $Q(\Delta)$ に同型になる。 □

詰まり, supercuspidal 表現 σ から 出発して, segment $\Delta(\sigma, r)$ からの放物誘導 $I_P^G(\Delta)$ の既約部分商 $Q\big(\Delta(\sigma, r)\big)$ を採ることで, 全ての discrete series 表現が得られるのである。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(m)^\wedge_{sc} & \to & \mathrm{GL}(mr)^\wedge_{ds} \\ \sigma & \rightsquigarrow & Q\big(\Delta(\sigma, r)\big) \end{array}$$

Note：$\mathrm{GL}(n)^\wedge_{ds} \backslash \mathrm{GL}(n)^\wedge_{sc} \neq \emptyset$ である。これらの表現を *special* 表現 と呼ぶ。
次の *Steinberg* 表現 が その典型例を 与える。
分割を $\underline{n} = (1, \dots, 1) \vdash n$(つまり $P = B$) に, 種になる supercuspidal $\sigma \in \mathrm{GL}(1)^\wedge_{sc}$ は $|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ に採る。すると, segment $\Delta = (|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}, |\cdot|^{\frac{3-n}{2}}, \dots, |\cdot|^{\frac{n-1}{2}})$ は, Borel 部分群 B の modulus character の半分 $\delta_B^{1/2}$ に過ぎない。従って, この segment Δ からの誘導表現は

$$\begin{aligned} I_B^G(\Delta) &= \{ f : GL(n; F) \to \mathbb{C}^{\otimes n} : smooth \mid f(mng) = \delta_B^{1/2}(m)\Delta(m)f(g) \} \\ &= \{ f : GL_n(F) \to \mathbb{C} : smooth \mid 左\ B - inv. \} \\ &= C^\infty\big(B \backslash GL_n(F)\big) \end{aligned}$$

となり, 旗多様体上の smooth 関数全体のなす $GL_n(F)$-加群 と判る。自明表現 $1_{\mathrm{GL}_n(F)}$ が $Z(\Delta)$ であり, これに対する 既約商 $Q(\Delta)$ が Steinberg 表現 St である。 ■

Theorem 5.10 (L-/ε-因子の表示；[Hen-2] p.153)**.**
π が $\mathrm{GL}_n(F)$ の *essentially square integrable* 表現 $Q(\Delta(\sigma, r))$ の時

$$L\big(s\,;\,\pi\big) \;=\; L\big(s\,;\,\sigma(r-1)\big) = L(s + r - 1\,;\,\sigma),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\big(s\,;\,\pi, \psi\big) = &\,\varepsilon\big(s\,;\,\sigma(0), \psi\big) \times \cdots \times \varepsilon\big(s\,;\,\sigma(r-1), \psi\big) \\ &\times \frac{L\big(-s\,;\,\sigma^\vee(-1)\big)}{L\big(s\,;\,\sigma(1)\big)} \times \cdots \times \frac{L\big(-s\,;\,\sigma^\vee(-(r-2))\big)}{L\big(s\,;\,\sigma(r-2)\big)} \end{aligned}$$

となる。 □

Note：L-因子には, segment $\Delta = [\sigma, \dots, \sigma(r-1)]$ の top twist $|\cdot|^{r-1}$ のみ が関るのに対し, ε-因子には, 全て の twist $|\cdot|^0, \dots, |\cdot|^{r-1}$ が関与している。

§ 5.3. discrete series から admissible dual へ

先の Bernstein の定理 (Proposition 5.9) によれば, $\mathrm{GL}(m)^{\wedge}_{sc}$ (m は n の約数) からの放物誘導によって得られるのは, essentially square integrable 表現 のみ である。しかし, $\mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{adm}$ には, $1_{\mathrm{GL}_n(F)}$ の様に $\mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{eds}$ に含まれない表現が 沢山ある。

そこで, もう一度 放物誘導の操作をして,

$$I_P^G\big(Q(\Delta_1),\ldots,Q(\Delta_r)\big) \;:=\; \mathrm{Ind}_{P_{\underline{n}}(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}\delta_{\underline{n}}^{1/2}\big(Q(\Delta_1)\boxtimes\cdots\boxtimes Q(\Delta_r)\big)\otimes 1_{N_{\underline{n}}(F)}$$

を考える。再び "いつ可約となるのか？"を問うと,

Theorem 5.11 (可約性の判定).
$I_P^G\big(Q(\Delta_1),\ldots,Q(\Delta_r)\big)$ が 可約 $\iff$ Δ_iとΔ_jが *linked* となる i,j がある □

であることが判る。この $I_P^G\big(Q(\Delta_1),\ldots,Q(\Delta_r)\big)$ の既約部分商たちで, GL_n の許容表現全体は 覆われる。

Proposition 5.12 ($\mathrm{GL}(n)$ の Langlands 分類 ; [Zel] Thm.6.1).
任意の既約許容表現 $\pi\in\mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{adm}$ に対し, $i<j$ なら Δ_i が Δ_j を *precede* しない *segments* の集まり $\Delta_1,\ldots,\Delta_r$ が 唯一組 定まり, π は $I_P^G\big(Q(\Delta_1),\ldots,Q(\Delta_r)\big)$ の既約部分商 $Q(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ に同型になる。 □

Note：segments の条件で $i>j$ とすると, $\pi\cong Z(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ となる。向きに注意。

上の判定条件に於いて現れた, "linked", "precede" とは

Definition 5.13. 二つの segments Δ と Δ' に対し,
(1) Δ と Δ' が linked とは, $\iff$ $\Delta\not\supset\Delta'$, $\Delta\not\subset\Delta'$ かつ $\Delta\cup\Delta'$ が segment である。
(2) Δ が Δ' を precede するとは, $\iff$ Δ と Δ' が linked かつ $\sigma(k)=\sigma'$, $\exists k\in\mathbb{N}$ ■

この Bernstein-Zelevinsky による Langlands 分類[31]を使えば,

Theorem 5.14 (L-/ε-因子の帰納的性質).
π が $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約許容表現 $Q(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ の時, その L-/ε-因子は,

$$L\big(s\,;\,\pi\big) \;=\; L\big(s\,;\,Q(\Delta_1)\big)\times\cdots\times L\big(s\,;\,Q(\Delta_r)\big)$$

$$\varepsilon\big(s\,;\,\pi,\psi\big) \;=\; \varepsilon\big(s\,;\,Q(\Delta_1),\psi\big)\times\cdots\times\varepsilon\big(s\,;\,Q(\Delta_r),\psi\big)$$

と分解する。 □

[31] Langlands 分類 とは, 一般に局所体上の簡約群 G に対し,「その既約許容表現が 放物誘導を繰り返すことで得られる」という形の分類理論を言う。p-進一般線形群 $\mathrm{GL}_n(F)$ に対しては, Bernstein-Zelevinsky が, 実/複素簡約 Lie 群 $G(\mathbb{R})$,$G(\mathbb{C})$ に対しては, Langlands が 示している。

§ 5.4. discrete series から tempered 表現へ

discrete series の収束条件を緩めた 次のクラスは, 一般化 Ramanujan 予想[32]の定式化に現れる 重要な表現である。

Definition 5.15. 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ が tempered であるとは, π の 任意の行列要素 $c_{\xi,\xi^\vee}$ が $L^{2+\epsilon}(Z(F)\backslash\mathrm{GL}_n(F))$ に属する (for $\forall\epsilon > 0$) ことである (但し, Z_n は $\mathrm{GL}(n)$ の中心)。その同値類の成す集合を

$$\mathrm{GL}(n)^\wedge_{temp} \;:=\; \{\mathrm{GL}_n(F) \text{ の tempered 表現 } (\pi, V_\pi)\}/\sim$$

と書く。 ■

前セクションの 可約判定定理 (Theorem 5.11) に依れば,

$$I_P^G\big(Q(\Delta_1),\ldots,Q(\Delta_r)\big) \text{ は 既約} \iff \text{どのペア } (\Delta_i,\Delta_j) \text{ も linked ではない}$$

であるが, この既約表現は 次の著しい性質を持つ。

Proposition 5.16 ([Jac-2])**.** 次が, 成り立つ。
(1) 既約な$I_P^G\big(Q(\Delta_1),\ldots,Q(\Delta_r)\big)$ は, 必ず *tempered* である。
(2) 逆に, 任意の *tempered* 表現 $\forall\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{temp}$ に対し, $\tau_i \in \mathrm{GL}(n_i)^\wedge_{ds}$ $(i = 1,\ldots,r)$ が定まり, π は 既約な$I_P^G(\tau_1,\ldots,\tau_r)$ に同型になる。 □

前セクションの Langlands 分類 Proposition 5.12 と 併せると

Corollary 5.17 ([Kud] Thm.2.2.2)**.**
任意の既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ に対し, $\pi_i \in \mathrm{GL}(n_i)^\wedge_{temp}$ と $x_i \in \mathbb{R}$, $x_1 \geq \cdots \geq x_r$ が 唯一組 定まり, π は $I_P^G\big(\pi_1(x_1),\ldots,\pi_r(x_r)\big)$ の既約部分商と同型になる。 □

Note：$\mathrm{GL}(n)^\wedge_{temp}\backslash\mathrm{GL}(n)^\wedge_{ds} \neq \emptyset$ である[33]。 ■

以上で, Bernstein-Zelevinsky の Segment Theory による, $\mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ の Langlands 分類 の 記述を終える。各表現の induction による構成達は, 次様の関係にある。

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & I_P^G\big(Q(\Delta_1),\ldots,Q(\Delta_r)\big) & & \\
 & & \nearrow & & & \\
\mathrm{GL}(*)^\wedge_{sc} \subset & \mathrm{GL}(*)^\wedge_{eds} & \subset & \mathrm{GL}(*)^\wedge_{temp} & \subset & \mathrm{GL}(*)^\wedge_{adm} \\
 & & & & & \\
\sigma & \mapsto Q\big(\Delta(\sigma,r)\big) & & \longmapsto & & Q(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)
\end{array}
$$

[32]GRC とは,「adele 群 $\mathrm{GL}(n;\mathbb{A})$ の 任意の既約 cuspidal 表現 $\pi \cong \otimes'_v\pi_v$ の 各成分 π_v は, 全て tempered であろう」との主張である。

以下のサブセクションでは, 保型形式への応用に於て重要なクラス：generic, unitary, spherical 表現 について記録しておく。

§ 5.5. generic 表現 と temperedness

先ず, *smooth Whittaker* 関数の空間 を 思い出しておく。非自明加法指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ から, 極大冪零群 $U_n(F)$ の 指標 ψ_{U_n} を $n \mapsto \psi(n_{1,2} + \cdots + n_{n-1,n})$ で定める。この ψ_{U_n} からの誘導表現 $\mathrm{Ind}_{U_n(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \psi_{U_n}$ を induced picture 実現しておく：

$$C^\infty_{\psi_{U_n}}(U_n \backslash \mathrm{GL}(n)) := \{f : \mathrm{GL}_n(F) \to \mathbb{C}_\psi \text{：smooth} \mid f(ng) = \psi_{U_n}(n) f(g)\}$$

へ $\mathrm{GL}_n(F)$ は 右移動で作用する。

Definition 5.18. 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ が generic である[34] とは, 次の性質を満たす $\mathrm{GL}_n(F)$-intertwiner が 存在することである。

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_\psi : V_\pi^\infty & \to & C^\infty_{\psi_{U_n}}(U_n \backslash \mathrm{GL}(n)) \\ \xi & \mapsto & \Lambda_\psi(\xi), \end{array}$$

$$\Lambda_\psi\big(\pi(g).\xi\big) = \big(\mathrm{Ind}_{U_n(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \psi_{U_n}\big)(g).\Lambda_\psi(\xi) = \Lambda_\psi(\xi)(g-) = \psi_{U_n}(n) \times \Lambda_\psi(\xi)(ak-)$$

この $\mathrm{GL}_n(F)$-intertwiner Λ_ψ を (π, V_π) に対する Whittaker 汎函数 と呼ぶ。 ■

Note：上の定義に於て, genericity は 加法指標 ψ の 採り方に依らない。これは $\mathrm{GL}(n)$ **特有の性質**であり, 一般の簡約群 G では ψ に依る。

では, 前セクションまでの Bernstein-Zelevinsky の Segment の言葉で generic 表現 を 特徴付けることが できるだろうか。

Theorem 5.19 (generic 表現 の 特徴付け；[Zel] Thm.9.7)**.**

既約許容表現 $\pi = Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ が *generic*

$\iff$ どのペア (Δ_i, Δ_j) も *linked* でない。 □

これと, Langlands 分類 Proposition 5.12 を 併せると

Corollary 5.20. $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$が *generic* $\implies \pi \cong I_P^G\big(Q(\Delta_1), \ldots, Q(\Delta_r)\big)$ □

[33]実素点上では, 一般の簡約群 G に対し,

$$(G^\wedge_{temp} \cap G^\wedge_{coh}) \backslash G^\wedge_{ds} \neq \emptyset \iff G^\wedge_{ds} = \emptyset \iff \mathrm{rk}_\mathbb{R} G \neq \mathrm{rk}_\mathbb{R} K$$

つまり, discrete series 表現が無い時に限り, tempered な cohomological 表現が存在する。逆に, discrete series 表現が有る時には, cohomological 表現は 全て non-tempered $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ である ([Bo-Wa] Thm.III.5.1)。

[34]Shalika の 定理「$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の 既約カスプ保型表現 $\pi \cong \otimes'_v \pi_v$ の 各成分 π_v は, **全て** generic」

Note : residual 表現 π では, 正しくない！ tempered ですらない！

また, $r=1$(*i.e.* 2-Step 目の I_P^G がない) なら $\pi = Q(\Delta)$ となり, Proposition 5.9 より,

Corollary 5.21. [35]$\forall \pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{ds}$ 又は *ess′ly square int′ble* $\Longrightarrow$ π : *generic* □

Note：上の Corollary と これまでの脚注達の関係は, 次の様に模式化しておくと, 印象的であろう。

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi \cong \otimes'_v \pi_v \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})\big) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \pi_v \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{temp} & & \longrightarrow & & \pi_v : generic \\ \cup & & & & \\ \pi_v \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{ds} & & \nearrow & & \end{array}$$

■

GRC は GL(n) **特有の性質**であり, 一般の簡約群 G では正しく <u>ない</u>： *i.e.* ”<u>CAP 表現</u>” $\pi \cong \otimes'_v \pi_v \in \mathcal{A}_0\big(G(\mathbb{A})\big)$, with $\pi_v \notin G(F)^\wedge_{temp}$ が存在する。

しかしながら, 次は 成り立つであろう と 信じられている。

Conjecture 5.22 ([Jac-1]). $G(\mathbb{A})$ の 任意の generic 既約 cuspidal 表現 $\pi^W \cong \otimes'_v \pi^W_v$ の 各成分 π^W_v は, 全て tempered であろう。即ち

$\pi^W \in \mathcal{A}_0\big(G(\mathbb{A})\big)$が *generic* ” $\Longrightarrow$ ” $\pi^W_v \in G(K)^\wedge_{temp}$であろう。 □

§ 5.6. unitary 表現 の Tadič 分類

Definition 5.23. 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ が <u>unitary</u> であるとは, 表現空間 V_π が 前 Hilbert 空間であり, $\forall g \in \mathrm{GL}(n)$ に対し $\pi(g)$ が等長的であること。 (*i.e.* $\forall \xi \in V_\pi$ に対し, $||\pi(g).\xi|| = ||\xi||$) その同値類の成す集合を

$$\mathrm{GL}(n)^\wedge \;:=\; \{\mathrm{GL}(n) \text{ の unitary 表現 } (\pi, V_\pi)\}/\sim$$

と書く。 ■

Note：$\mathrm{GL}(n)^\wedge_{ds} \subset \mathrm{GL}(n)^\wedge \subset \mathrm{GL}(n)^\wedge_{adm}$ であること に注意せよ。

一般に, unitary dual の決定は 大変困難だが, $\mathrm{GL}_n(F)$ の場合には次が知られている。

$$\begin{aligned} u(\tau, r) &:= Q\Big(\tau(\frac{r-1}{2}), \tau(\frac{r-3}{2}), \ldots, \tau(\frac{1-r}{2})\Big), \\ uc(\tau, r, \alpha) &:= I_P^G\big(u(\tau,r)(\alpha), u(\tau,r)(-\alpha)\big). \end{aligned}$$

（但し, $\tau \in \mathrm{GL}(m)^\wedge_{ds}$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1/2)$）は, 既約 unitary 表現を定める。

[35]Proposition 5.16 より, 任意の tempered 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^\wedge_{temp}$ は, generic である。
Note： これは GL(n) **特有の性質**であり, 一般の簡約群 G では正しくない。

Theorem 5.24 ([Tad] Thm.D). 特別な既約 *unitary* 表現の集合 $\mathcal{B}$ を 次で定める：

$$\mathcal{B} \;:=\; \{u(\tau,r),\; uc(\tau,r,\alpha) \mid \tau \in \mathrm{GL}(m)^{\wedge}_{ds},\; r \in \mathbb{N},\; \alpha \in (0,1/2)\}/\sim$$

(1) $\pi_1,\ldots,\pi_r \in \mathcal{B}$ からの放物誘導は, 既約 *unitary* 表現となる：$I_P^G(\pi_1,\ldots,\pi_r) \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}$
(2) 逆に, 任意の 既約 *unitary* 表現 $\forall\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}$ に対し, $\pi_1,\ldots,\pi_r \in \mathcal{B}$ が 唯一組 定まり, π は $I_P^G(\pi_1,\ldots,\pi_r)$ に同型になる。 □

§ 5.7. spherical 表現 と その L-因子

Definition 5.25. 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{adm}$ が spherical であるとは, hyperspecial 極大 コンパクト部分群 K による固定ヴェクトル $\xi^{\circ} \neq 0$ (spherical vector と呼ぶ) をもつことである：$V_{\pi}^{K} \neq \{0\}$。但し, hyperspecial 極大 コンパクト部分群[36] とは, $K := \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ である。spherical 表現の同値類の成す集合を

$$\mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{sphl} \;:=\; \{\mathrm{GL}_n(F) \text{ の spherical 表現 } (\pi, V_{\pi})\}/\sim$$

と書く。 ■

Fact：任意の $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{sphl}$ に対し, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\pi}^{K} = 1$；spherical vector は一本のみ。

Theorem 5.26 (spherical 表現 の 特徴付け). [37]
$\chi_1,\ldots,\chi_n$ を $\mathrm{GL}(1)$ の *spherical* 表現 ; $\chi_i \in \mathrm{GL}(1)^{\wedge}_{sphl}$ (局所類体論を使えば, $F^{\times}$ の不分岐指標) とする。$\chi_1,\ldots,\chi_n$ は *precede* しない とする。
(1) $I_B^G(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ の 唯一の既約商 $Q(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ は, *spherical* である。
(2) 逆に, 任意の 既約 *spherical* 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{sphl}$ に対し, $\chi_1,\ldots,\chi_r \in \mathrm{GL}(1)^{\wedge}_{sphl}$ が 一組 定まり, π は $Q(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ に同型になる。 □

Definition 5.27. 既約 spherical 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{sphl}$ に対し, 上 Theorem で定まる不分岐指標の順序組 $(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ を使い,

$$A(\pi) \;:=\; \begin{bmatrix} \chi_1(\varpi) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_n(\varpi) \end{bmatrix}$$

とおき, π の 佐武パラメター と呼ぶ。但し, ϖ は $\mathcal{O}_F$ の素元である。 ■

Definition 5.28. 既約 spherical 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{sphl}$ に対し, その L-因子[38] を

$$L(s;\pi) \;:=\; \det\left(I_n - A(\pi)q^{-s}\right)^{-1} \;:=\; \prod_{i=1}^{n}\left(1-\chi_i(\varpi)q^{-s}\right)^{-1}$$

と定める。ここで, q は 剰余体 $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$ の位数である。 ■

[36] 全ての 極大 コンパクト部分群は, K に共役なので, "hyperspecial" の語は不要。これは, $\mathrm{GL}(n)$ **特有の性質**；例えば, $GSp(4)$ には, 共役でない 極大 コンパクト部分群が 二つある。
[37] この定理の証明には, 「spherical Hecke 環の有限次元表現との対応」を使う。
[38] 任意の既約 spherical 表現 $\pi \in \mathrm{GL}(n)^{\wedge}_{sphl}$ に対し, その ε-因子は 自明である：$\varepsilon(s;\pi,\psi) = 1$。See §3.3

References

[Br-Co-Di-Ta] Breuil, C.; Conrad, B.; Diamond, F.; Taylor, R., On the modularity of elliptic curves over **Q**: wild 3-adic exercises, J. AMS. **14** (2001), 843–939 .

[Bum] Bump, D., *Automorphic Forms and Representations* Cambridge Studies in Advanced Math., **55** (1997), Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[Bus-1] Bushnell, C., Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of GL_N, J. Reine Angew. Math. **375/376** (1987), 184–210.

[Bus-2] Bushnell, C., Gauss sums and local constants for $\mathrm{GL}(N)$, *L-functions and arithmetic (Durham, 1989)*, LMS Lec. Note Ser. **153** (1991), 61–73.

[Bu-Fr] Bushnell, C.; Fröhlich, A., Nonabelian congruence Gauss sums and p-adic simple algebras, Proc. of LMS. **50** (1985), 207–264.

[Cas] Casselman, W., On some results of Atkin and Lehner, Math. Ann. **201** (1973), 301–314.

[Cog] Cogdell, J., L-functions and converse theorems for GL_n, *Automorphic forms and applications*, IAS/Park City Math. Ser.**12** (2007), 97–177.

[Del] Deligne, P., Formes modulaires et représentations de GL(2), LNM **349**, Springer (1973), 55–105.

[Fla] Flath, D., Decomposition of representations into tensor products, *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Symp. Pure Math.**33** (1979), 179–183.

[Ge-Sh] Gelbart,S.; Shahidi,F., *Analytic Properties of Automorphic L-functions*, Perspectives in Mathematics, **6** (1988), Academic Press, Inc.

[G-G-PS] Gel'fand, I. M.; Graev, M. I.; Piatetski-Shapiro, I.I., *Representation theory and automorphic functions*, Generalized Functions, **6** (1990), Academic Press Inc.

[Ge-Ka] Gel'fand, I. M.; Kajdan, D., Representations of the group $\mathrm{GL}(n, K)$ where K is a local field, *Lie groups and their representations* (1975), 95–118.

[Go-Ja] Godement, R.; Jacquet, H., *Zeta functions of simple algebras*, LNM **260**, Springer (1972).

[Ha-Ta] Harris, M.; Taylor, R., *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. of Math. Studies **151**, Princeton Univ. Press (2001).

[Hen] Henniart, G., Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique , Inv. Math. **139** (2000), 439–455.

[Jac-1] Jacquet, H., Principal L-functions of the linear group, *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Sym. Pure Math. **33** (1979), 63–86.

[Ja-PS-Sh-1] Jacquet, H.; Piatetski-Shapiro, I. I.; Shalika, J., Automorphic forms on GL(3) I,II, Ann. of Math. **109** (1979), 169–212, 213–258.

[Ja-PS-Sh-2] Jacquet, H.; Piatetski-Shapiro, I. I.; Shalika, J., Conducteur des représentations du groupe linéaire, Math. Ann. **256** (1981), 199–214.

[Ja-PS-Sh-3] Jacquet, H.; Piatetski-Shapiro, I. I.; Shalika, J., Rankin-Selberg convolutions, Amer. J. Math. **105** (1983), 367–464.

[Ja-Sh] Jacquet, H.; Shalika, J., On Euler products and the classification of automorphic representations I,II, Amer. J. Math. **103** (1981), 499–558, 777–815.

[Ogg] Ogg, A. P., Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. **89** (1967), 1–21.

[PS] Piatetski-Shapiro, I. I., Euler subgroups, *Lie groups and their representations* (1975), 597–620.

[Sai] Saito, T., Conductor, discriminant, and the Noether formula of arithmetic surfaces, Duke Math. J. **57** (1988), 151–173.

[Sha] Shalika, J., The multiplicity one theorem for GL_n, Ann. of Math. **100** (1974), 171–193.

[Shin] Shintani, T., On an explicit formula for class-1 "Whittaker functions" on GL_n over P-adic fields, Proc. Japan Acad. **52** (1976), 180–182.

[Ta-Wi] Taylor, R.; Wiles, A., Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, Ann. of Math.**141** (1995), 553–572.

[Wil] Wiles, A., Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Ann. of Math. **141** (1995), 443–551.

[石川] Ishikawa, Y., Rnakin-Selberg method –through typical examples– 第１６回整数論サマースクール「保型 L-関数」報告集 (2009).

[For Appendix]

[Be-Ze-1] Bernstein, I. N.; Zelevinsky, A. V., Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field, Russian Math. Surveys **31** (1976), 1–68.

[Be-Ze-2] Bernstein, I. N.; Zelevinsky, A. V., Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I, Ann. Sci. École Norm. Sup.**10** (1977), 441–472.

[Bor] Borel, A., Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup, Inv. Math. **35** (1976), 233–259.

[Bo-Wa] Borel, A.; Wallach, N., Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, **67**. AMS, Providence, 2000.

[Jac-2] Jacquet, H., Generic representations, *Non-commutative harmonic analysis*, LNM **587** (1977), 91–101.

[Hen-2] Henniart, Gut, On the local Langlands conjecture for GL(n): the cyclic case, Ann. of Math. **123** (1986), 145–203.

[Kud] Kudla, S. S., The local Langlands correspondence: the non-Archimedean case, *Motives*, Proc. Symp. Pure Math. **55** (1994), 365–391.

[Rod] Rodier, F., Représentations de GL(n, k) où k est un corps p-adique. Bourbaki Seminar, Vol.1981/1982, Astérisque **92–93** (1982), 201–218.

[Tad] Tadić, M., Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case), Ann. Sci.École Norm. Sup. **19** (1986), 335–382.

[Zel] Zelevinsky, A. V., Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of GL(n). Ann. Sci. École Norm. Sup.**13** (1980), 165–210.